Baccalauréat Amérique du Sud – 26 septembre 2023

Exercice 1

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \ln x \ = 0$ par croissance comparée.
   $\lim\limits_{x \to 0} -2x^2 \ln x \ = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x^2) = 1$
   donc par somme des limites $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

   On remarque que :

   $1 + x^2(1 - 2\ln x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = \ f(x)$

   $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - 2\ln x \ = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$. Donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2(1 - 2\ln x\ ) = -\infty$

   et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

2. $f(x)$ est définie et dérivable sur]0 ;+∞[comme produit de la fonction carré avec la fonction inverse définies et dérivables sur]0 ;+∞[et comme somme avec un polynôme du second degré, défini et dérivable sur]0 ;+∞[.

$$f'(x) = 2x + \left(-4x \times \ln x + (-2x^2) \times \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2x - 4x \ln x \ - 2x$$

$$f'(x) = -4x \ln x$$

3. Sur]0 ;+∞[, $-4x < \ 0$ et $\ln x \geq 0 \ \Leftrightarrow x \geq 1$

x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Sur]0 ; 1], $f'(x)$ est positive donc f est croissante.

Sur [1 ;+∞[, $f'(x)$ est négative donc f est décroissante.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-∞

4. Sur [1 ; +∞[, la fonction f est continue et strictement décroissante.
   $f(1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   $0 \in]-\infty; 2]$
   D'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur [1 ; +∞[

   $f(1) = 2$ et $f(e) = 1 - e^2 < 0$

$$1 - e^2 \leq 0 \leq 2$$

$$f(e) \leq f(\alpha) \leq f(1)$$

et f est décroissante sur [1 ;+∞[

$$1 \leq \alpha \leq e$$

   donc $\alpha \in [1\,;\,e]$.

5. L'algorithme de dichotomie retourne un encadrement d'amplitude 0,1 de la valeur de α. De plus, on sait que $\alpha \in [1\,;\,e]$ ce qui élimine les propositions C et D.
   L'amplitude des valeurs de la proposition A est supérieure à 0,1. Donc la proposition B est la bonne réponse.

Partie B

1. La fonction $g(x)$ est définie et dérivable sur]0 ; +∞[comme quotient de la fonction logarithme népérien et d'un polynôme tous les deux définis et dérivable sur ce même intervalle.

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1 + x^2) - \ln x \times 2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x \ln x}{(1 + x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x}}{(1 + x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)}{x(1 + x^2)^2}$$

2. Sur $]0\,;+\infty[$, $x > 0$ et $(1+x^2)^2 > 0$ donc $g'(x)$ et $f(x)$ ont le même signe.

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	

Ainsi d'après le tableau de variations de g, la fonction g admet un maximum en $x = \alpha$.

3. Déterminons les équations des tangentes T_1 et T_α

$T_1 : y = g'(1)(x-1) + g(1)$

$g'(1) = \frac{f(1)}{(1+1^2)^2} = \frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{\ln 1}{1+1^2} = 0$

$T_1 : y = \frac{1}{2}(x-1)$

$T_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$T_\alpha : y = g'(\alpha)(x-\alpha) + g(\alpha)$

$g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)}{(1+1^2)^2} = 0$ et $g(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}$

$T_\alpha : y = \frac{1}{2\alpha^2}$

On résout $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\alpha^2} \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\alpha^2} + 1 \\ y = \frac{1}{2\alpha^2} \end{cases}$

Les deux tangentes se coupent en $\left(\frac{1}{\alpha^2} + 1 ; \frac{1}{2\alpha^2}\right)$

<u>Exercice 2</u>

1. a. $\frac{293898}{18221965} \times 100 = 1{,}6\%$

Le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020 est de 1,6%.

b. $\frac{4921}{18221965} \times 100 = 0{,}03\%$ par excès.

Le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1%.

2. a. On répète 20 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante. Le succès « L'accouchement est un accouchement double » a une probabilité de 0,016. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}016$.

   Calculons $P(X = 1) = \binom{20}{1} \times 0{,}016^1 \times 0.984^{19} = 0{,}724$

   La probabilité d'avoir exactement un accouchement double est de 0,724

   b. $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99$

   $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0{,}01$

   $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \binom{n}{0}0{,}016^0(1 - 0{,}016)^n \leq 0{,}01$

   $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow (0{,}984)^n \leq 0{,}01$

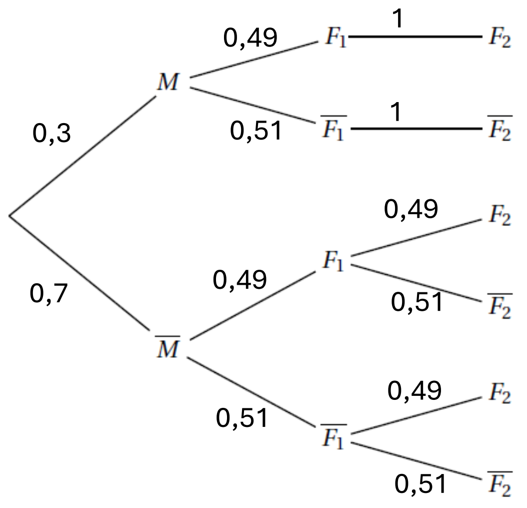
   $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \ln 0{,}984 \leq \ln 0{,}01$

   $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}984}$

   $P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq 286$

Pour avoir au moins un accouchement double avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99, il faut pratiquer au minimum 256 accouchements dans une journée.

3. a.



   b. M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales,

on a : $P(F_1 \cap F_2) = P(M \cap F_1 \cap F_2) + P(\overline{M} \cap F_1 \cap F_2)$

   $P(F_1 \cap F_2) = P(M) \times P_M(F_1) \times P_{M \cap F_1}(F_2) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(F_1) \times P_{\overline{M} \cap F_1}(F_2)$

   $P(F_1 \cap F_2) = 0{,}3 \times 0{,}49 \times 1 + 0{,}7 \times 0{,}49 \times 0{,}49$

$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}31507$

La probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,315 07.

c. $P_{F_1 \cap F_2}(M) = \frac{P(M \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)}$

$P_{F_1 \cap F_2}(M) = \frac{0{,}3 \times 0{,}49 \times 1}{0{,}31507}$

$P_{F_1 \cap F_2}(M) = 0{,}467$

La probabilité que les nouveau-nés soient monozygotes sachant que ce sont des jumelles est de 0,467.

Exercice 3

1. a. $KC = \sqrt{(x_C - x_K)^2 + (y_C - y_K)^2 + (z_C - z_K)^2}$
$KC = \sqrt{(4-0)^2 + (-8-4)^2 + (0-3)^2}$
$KC = \sqrt{16 + 144 + 9}$
$KC = \sqrt{169}$
$KC = 13$

La distance entre le point C et le centre K de la sphère S est égale au rayon de la sphère, donc le point C appartient à la sphère S.

b. Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4-0 \\ -8-4 \\ 0+10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4-0 \\ -8-4 \\ 0-16 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -16 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 4 - 12 \times (-12) + 10 \times (-16) = 16 + 144 - 160 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux et ont un point commun C donc le triangle ABC est rectangle en C.

2. a. $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) si et seulement il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -26 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -16 \end{pmatrix}$ ont des coordonnées non proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires.

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 3 \times 0 + 1 \times 0 \times 0 \times (-26) = 0$
$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 4 \times 1 \times (-12) \times 0 \times (-16) = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. Une équation cartésienne de plan est $ax + by + cz + d = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Ainsi $3x + y + d = 0$
De plus $A(0\,;4\,;16) \in (ABC)$. Ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de plan.

$3 \times 0 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$

Une équation cartésienne de plan (ABC) est $3x + y - 4 = 0$

3. a. On calcule KD

$KD = \sqrt{(12-0)^2 + (0-4)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13$

$D(12\,;0\,;0)$ appartient à l'axe des abscisses (ordonnée et cote nulles) et à la sphère de rayon 13 et de centre K donc D est un point d'intersection de la sphère S avec l'axe (Ox).

b. La droite Δ est orthogonale au plan (ABC). Son vecteur directeur est aussi le vecteur normal $\vec{n}\,(3; 1; 0)$du plan. Et $D(12; 0; 0) \in \Delta$. Ainsi :

$$\Delta : \begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c. Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H de D sur (ABC). H vérifie l'équation paramétrique de Δ et l'équation cartésienne de (ABC).

$$\begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = t \\ z = 0 \\ 3x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = t \\ z = 0 \\ 3(12 + 3t) + t - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = t \\ z = 0 \\ 32 + 10t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 12 + 3t \\ y = t \\ z = 0 \\ t = \frac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 + 3 \times \frac{16}{5} \\ y = \frac{16}{5} \\ z = 0 \\ t = \frac{16}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{108}{5} \\ y = \frac{16}{5} \\ z = 0 \\ t = \frac{16}{5} \end{cases}$$

Donc $H\left(\frac{108}{5}; \frac{16}{5}; 0\right)$

Ainsi $DH = \sqrt{\left(\frac{108}{5} - 12\right)^2 + \left(\frac{16}{5} - 0\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{2304}{25} + \frac{256}{25}} = \sqrt{\frac{512}{5}} = \frac{16\sqrt{10}}{5}$

La distance du point D au plan (ABC) est de $\frac{16\sqrt{10}}{5}$.

4. Le tétraèdre ABCD a pour base le triangle ABC rectangle en C et pour hauteur [DH], avec H projeté orthogonal de D sur (ABC). Donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$
$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times DH$$
$$V = \frac{1}{3} \times \frac{BC \times AC}{2} \times DH$$

On a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ -16 \end{pmatrix}$

D'où

$$BC = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + 10^2} = 2\sqrt{65}$$
$$AC = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + (-16)^2} = 4\sqrt{26}$$

Ainsi $V = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{65} \times 4\sqrt{26}}{2} \times \frac{16\sqrt{10}}{5}$

$$V = \frac{1664}{3}$$

$V = 555$ unités de volume.

Exercice 4

Partie A

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme du second degré.

$$f(x) = 2x - 2x^2$$
$$f'(x) = 2 - 4x$$
$$2 - 4x \geq 0 \iff 2 \geq 4x \iff x \leq \frac{1}{2}$$

Sur l'intervalle $\left[0\,; \frac{1}{2}\right]$, on a :

x	0	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$+$	
f	0 $\nearrow$	$\frac{1}{2}$

Donc f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. Calcul de u_1 :

$u_1 = 2u_0(1 - u_0)$
$u_1 = 2 \times 0{,}3 \times (1 - 0{,}3)$
$u_1 = 0{,}42$
Soit la propriété P(n) : $u_n \leq u_{n+1}$

Initialisation :
$u_0 = 0{,}3$ et $u_1 = 0{,}43$ donc $u_0 \leq u_1$.
P(0) est vraie.

Hérédité : Supposons P(n) vraie pour un entier naturel n, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$
Montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

On a $u_n \leq u_{n+1}$
Et $u_{n+1} = f(u_n)$
Or f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
Donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$. L'ordre est conservé.
Ainsi $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

P(n+1) est vraie.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire donc $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n.

3. D'après la question 2, on en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$.
   D'après le théorème de convergence des suites monotones, la suite (u_n) converge.

4. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ d'une suite convergente est solution de l'équation $f(x) = x$
   $\Leftrightarrow x = 2x(1 - x)$
   $\Leftrightarrow 2x - 2x^2 - x = 0$
   $\Leftrightarrow -2x^2 + x = 0$
   $\Leftrightarrow x(-2x + 1) = 0$
   D'après la règle du produit nul :
   $x = 0$ ou $-2x + 1 = 0$
   $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$
   La limite de la suite est donc soit ℓ= 0 soit ℓ= $\frac{1}{2}$. Or la suite est minorée par 0 et croissante donc sa limite est $\ell = \frac{1}{2}$.

Partie B

1. a. Avec $b = 0$ on a $P_{n+1} - P_n = P_n$

d'où $P_{n+1} = 2P_n$

Ainsi (P_n) est géométrique de raion 2 est de premier terme $P_0 = 3$.

b. La forme explicite de P_n est $P_n = 3 \times 2^n$ pour tout entier naturel n.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ pour $q > 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 2^n = +\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$

2. a. Avec $b = 0{,}2$ on a $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0{,}2P_n)$

Calcul de v_0 :
$v_0 = 0{,}1 \times P_0$
$v_0 = 0{,}1 \times 3$
$v_0 = 0{,}3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$v_{n+1} = 0{,}1 \times P_{n+1}$
$v_{n+1} = 0{,}1 \times [\, P_n(1 - 0{,}2P_n) + P_n]$
$v_{n+1} = 0{,}1P_n(1 - 2 \times 0{,}1P_n) + 0{,}1P_n$
$v_{n+1} = v_n(1 - 2v_n) + v_n$
$v_{n+1} = v_n(1 - 2v_n + 1)$
$v_{n+1} = v_n(2 - 2v_n)$
$v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$

b. On reconnaît la suite (u_n) étudiée dans la partie A.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Et $P_n = \frac{v_n}{0{,}1}$
Donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \frac{\frac{1}{2}}{0{,}1} = 5$

A long terme, la population se stabilisera autour de 5 000 individus.