

Spécialité physique chimie

Exercice B – REFROIDISSEMENT D'UN FER À CHEVAL (5 points)

MOTS-CLÉS : premier principe de la thermodynamique, loi de Newton de la thermique

1. Chauffage du fer

Q1. Par définition de la masse volumique : $\rho_{\text{Fer}} = \frac{m_{\text{Fer}}}{V_{\text{Fer}}} \Leftrightarrow m_{\text{Fer}} = \rho_{\text{Fer}} \cdot V_{\text{Fer}}$

$$m_{\text{Fer}} = 7,87 \text{ g.cm}^{-3} \times 104 \text{ cm}^3 = 818 \text{ g}$$

Q2. $\Delta U = m_{\text{Fer}} \cdot c_{\text{Fer}} \cdot \Delta\theta$

$$\Delta U = 818,48 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 440 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times (900 - 15) \text{ K} = 3,19 \times 10^5 \text{ J} = 319 \text{ kJ}$$

Remarque : une différence de température en °C est égale à la même différence de température en K

Q3. Au niveau microscopique, l'augmentation de l'énergie interne du fer à cheval correspond à une augmentation de l'énergie cinétique microscopique des atomes de fer (agitation thermique).

2. Refroidissement du fer

2.1. Refroidissement à l'air libre

Q4. Considérons que le système {fer à cheval} est au repos alors son énergie mécanique ne varie pas ; le 1er principe de la thermodynamique donne $\Delta U = W + Q$

On va considérer que le système n'échange pas de travail avec l'extérieur malgré les coups de marteaux du maréchal-ferrant..., ainsi $W = 0$ et donc $\Delta U = Q$.

Donc $Q = \Delta U = m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}} \cdot \Delta\theta$ avec $\Delta\theta = \theta(t + \Delta t) - \theta(t)$

Par définition du flux thermique : $\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

La loi de Newton dans l'air donne : $\Phi = h_{\text{air}} \cdot S \cdot (\theta_{\text{EXT}} - \theta)$

En égalant les deux expressions de Φ : $m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = h_{\text{air}} \cdot S \cdot (\theta_{\text{EXT}} - \theta)$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{h_{\text{air}} \cdot S}{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}} \cdot (\theta_{\text{EXT}} - \theta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{h_{\text{air}} \cdot S}{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}} \cdot \theta_{\text{EXT}} - \frac{h_{\text{air}} \cdot S}{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}} \cdot \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \frac{h_{\text{air}} \cdot S}{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}} \cdot \theta = \frac{h_{\text{air}} \cdot S}{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}} \cdot \theta_{\text{EXT}}$$

En faisant tendre Δt vers 0, et avec $\tau = \frac{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}}{h_{\text{air}} \cdot S}$ on obtient $\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau} = \frac{\theta_{\text{EXT}}}{\tau}$

Q5. Vérifions que $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{\text{EXT}}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{EXT}}$ est solution de l'équation différentielle précédente.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\left((\theta_0 - \theta_{\text{EXT}}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{\text{EXT}}\right)}{dt} = (\theta_0 - \theta_{\text{EXT}}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 0$$

Injectons les expressions de θ et $\frac{d\theta}{dt}$ dans l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau} = \frac{\theta_{EXT}}{\tau}$:

$$(\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot \left[(\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{EXT} \right] = \frac{\theta_{EXT}}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\theta_{EXT}}{\tau} = \frac{\theta_{EXT}}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \cdot (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot \left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$$

$\Leftrightarrow (\theta_0 - \theta_{EXT}) \times 0 \times e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$ Cette relation est vraie quel que soit t donc $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{EXT}) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{EXT}$ est bien solution de l'équation différentielle précédente.

Autre méthode :

On écrit l'équation différentielle $\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau} = \frac{\theta_{EXT}}{\tau}$ sous la forme $y' = a.y + b$ qui admet des solutions de la

forme $y = K.e^{a.x} - \frac{b}{a}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\theta}{\tau} + \frac{\theta_{EXT}}{\tau}$$

Par analogie, $a = -\frac{1}{\tau}$ et $b = \frac{\theta_{EXT}}{\tau}$

$$\text{donc } -\frac{b}{a} = -\frac{\frac{\theta_{EXT}}{\tau}}{-\frac{1}{\tau}} = \theta_{EXT}$$

ainsi les solutions sont de la forme $\theta(t) = K.e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{EXT}$.

En tenant compte des conditions initiales, on peut trouver l'unique solution : $\theta(t=0) = \theta_0$

$$\theta_0 = K.e^0 + \theta_{EXT} = K + \theta_{EXT} \Leftrightarrow K = \theta_0 - \theta_{EXT} \text{ donc } \theta(t) = (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \theta_{EXT}$$

Q6. D'après l'énoncé, le maréchal-ferrant pose le fer à cheval au bout de deux minutes soit 120 s (τ est

donnée en s) : $\theta(t=120s) = (900 - 15) \times e^{-\frac{120}{880}} + 15 = 787^\circ\text{C}$

$$(900-15) \times e^{-\frac{120}{880}} + 15 = 7.871848842E2$$

Le fer est donc encore très chaud quand il est posé sur le sabot ; on comprend bien pourquoi cela brûle la corne.

2.2. Refroidissement dans l'eau avant la pose.

Q7. En adaptant le modèle dans l'eau froide : $\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{EXT}) \times e^{-\frac{t}{\tau_{eau}}} + \theta_{EXT}$ avec $\theta_0 = 600^\circ\text{C}$ et

$$\tau_{eau} = \frac{m_{\text{fer}} \cdot c_{\text{fer}}}{h_{\text{eau}} \cdot S}$$

$$\tau_{eau} = \frac{818 \times 10^{-3} \text{ kg} \times 440 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}}{360 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \times 293 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 34,1 \text{ s} \quad \text{cohérent car très inférieure à 880 s obtenue dans l'air}$$

Il faut donc trouver t_f qui vérifie : $\theta_{\text{finale}} = (\theta_0 - \theta_{EXT}) \times e^{-\frac{t_f}{\tau_{eau}}} + \theta_{EXT}$

$$\theta_{\text{finale}} - \theta_{EXT} = (\theta_0 - \theta_{EXT}) \cdot e^{-\frac{t_f}{\tau_{eau}}}$$

$$e^{-\frac{t_f}{\tau_{eau}}} = \frac{\theta_{\text{finale}} - \theta_{EXT}}{\theta_0 - \theta_{EXT}}$$

$$-\frac{t_f}{\tau_{eau}} = \ln\left(\frac{\theta_{\text{finale}} - \theta_{EXT}}{\theta_0 - \theta_{EXT}}\right)$$

$$t_f = -\tau_{eau} \cdot \ln\left(\frac{\theta_{\text{finale}} - \theta_{EXT}}{\theta_0 - \theta_{EXT}}\right)$$

$$\text{Finalement : } t_f = -34,1 \times \ln\left(\frac{40 - 15}{600 - 15}\right) = 108 \text{ s}$$

Q8. On peut imaginer que si seulement 20 secondes suffisent, c'est que le modèle choisi n'est pas adapté.

Les échanges entre le fer et l'eau n'obéissent probablement pas à la loi de Newton :

- les échanges entre le fer et l'eau ne sont pas principalement conducto-convectifs car le fer est très chaud et il perd de l'énergie par rayonnement ;
- la température de l'eau n'est pas constante alors qu'elle doit jouer le rôle de thermostat ;
- l'eau change d'état (ce qui demande beaucoup d'énergie).