

FICHE DE COURS

QUATRIÈME

Triangles égaux, triangles semblables

Espace et géométrie — Chapitre 5

1 Triangles égaux

Définition

Deux triangles sont **égaux** (ou superposables) s'ils ont les mêmes longueurs de côtés et les mêmes mesures d'angles, dans le même ordre.

Cas d'égalité des triangles

Deux triangles sont égaux dans chacun des cas suivants :

- **LLL** : ils ont leurs trois côtés de même longueur, deux à deux ;
- **LAL** : ils ont un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, deux à deux ;
- **ALA** : ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure, deux à deux.

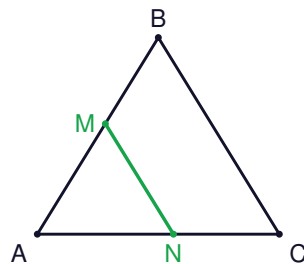
Méthode

Exemple 1 Les triangles ABC et DEF vérifient $AB = DE = 5$ cm, $\hat{A} = \hat{D} = 40$ et $AC = DF = 7$ cm. Justifier que ces triangles sont égaux.

L'angle $\hat{A}$ est compris entre les côtés $[AB]$ et $[AC]$, de même pour $\hat{D}$ entre $[DE]$ et $[DF]$. On a un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur, deux à deux : c'est le cas **LAL**.

Les triangles ABC et DEF sont donc égaux.

2 Le théorème de Thalès



Configuration de Thalès

Dans un triangle ABC , si M appartient à $[AB]$, N appartient à $[AC]$, et si les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Méthode

Exemple 2 Dans le triangle ABC ci-dessus, $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ avec $(MN) \parallel (BC)$. On donne $AM = 3$ cm, $AB = 8$ cm et $AC = 10$ cm. Calculer AN .

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \iff \frac{3}{8} = \frac{AN}{10}$$

On isole AN :

$$AN = \frac{3 \times 10}{8} = 3,75$$

La longueur AN mesure donc 3,75 cm.

Attention

Le théorème de Thalès ne s'applique que si les points sont **correctement alignés** (ici, A, M, B alignés et A, N, C alignés) et si les droites (MN) et (BC) sont **parallèles**. Il faut toujours vérifier ces conditions avant de l'utiliser.

3 Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont **semblables** s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille : leurs angles sont égaux deux à deux, et leurs côtés sont proportionnels deux à deux.

Propriété

Deux triangles sont semblables dans chacun des cas suivants :

- ils ont deux angles égaux, deux à deux (le troisième est alors automatiquement égal aussi) ;
- leurs trois côtés sont proportionnels, deux à deux.

Dans la configuration de Thalès, les triangles AMN et ABC sont toujours **semblables**.

Méthode

Exemple 3 Les triangles RST et UVW ont $\hat{R} = \hat{U} = 55$ et $\hat{S} = \hat{V} = 70$. Justifier qu'ils sont semblables, puis calculer $\hat{T}$ et $\hat{W}$.

Les triangles ont deux angles égaux deux à deux : ils sont donc **semblables**.

La somme des angles d'un triangle vaut 180, donc :

$$\hat{T} = 180 - 55 - 70 = 55$$

Comme les triangles sont semblables, $\hat{W} = \hat{T} = 55$.

À retenir

Triangles égaux : cas LLL, LAL ou ALA.

Théorème de Thalès : si $(MN) \parallel (BC)$ dans la configuration ci-dessus, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Triangles semblables : mêmes angles deux à deux, côtés proportionnels deux à deux (même forme, taille différente possible).