

FICHE DE COURS

TROISIÈME

Triangles semblables et théorème de Thalès

Espace et géométrie — Chapitre 10

1 Triangles semblables

Définition

Deux **triangles semblables** sont deux triangles dont les angles sont égaux deux à deux.

Propriété

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont **proportionnelles**, alors ces deux triangles sont semblables.

Réciproquement, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

► Pour comparer les côtés, chaque côté d'un triangle a un **homologue** dans l'autre : on associe le plus petit côté avec le plus petit, le plus grand avec le plus grand.

► Le rapport commun des longueurs est le **coefficient d'agrandissement** (s'il est supérieur à 1) ou de **réduction** (s'il est compris entre 0 et 1) qui transforme un triangle en l'autre.

Méthode

Exemple Le triangle ABC a pour côtés $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $CA = 6$ cm. Le triangle DEF a pour côtés $DE = 6$ cm, $EF = 7,5$ cm et $FD = 9$ cm. Montrer que ces deux triangles sont semblables.

On associe les côtés homologues, puis on calcule le rapport de chaque paire :

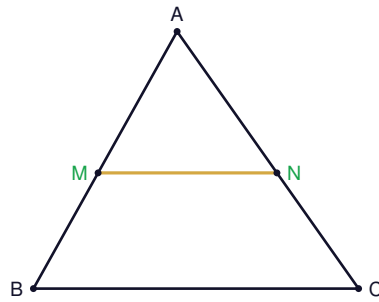
$$\frac{DE}{AB} = \frac{6}{4} = 1,5 \quad \frac{EF}{BC} = \frac{7,5}{5} = 1,5 \quad \frac{FD}{CA} = \frac{9}{6} = 1,5$$

Les trois rapports sont égaux, donc les longueurs des côtés sont proportionnelles. Par conséquent, les triangles ABC et DEF sont semblables : le triangle DEF est un agrandissement de rapport 1,5 du triangle ABC .

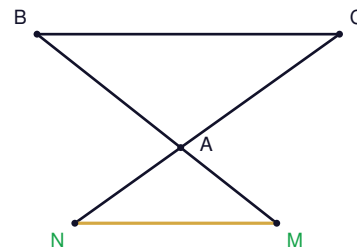
2 Théorème de Thalès

Rappel

Le théorème de Thalès s'applique dans deux configurations, selon la position des points :



« triangles emboîtés »



« papillon »

Théorème de Thalès

Si deux droites sécantes sont coupées par deux droites parallèles, alors elles déterminent deux triangles semblables.

Dans les deux configurations ci-dessus, les droites (AB) et (AC) , sécantes en A , sont coupées par les droites parallèles (BC) et (MN) . On en déduit l'égalité des rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Méthode

Exemple Dans la configuration « triangles emboîtés », les points A, M, B sont alignés et les points A, N, C sont alignés. On sait que (MN) est parallèle à (BC) , avec $AM = 4$ cm, $AB = 6$ cm et $BC = 9$ cm. Calculer la longueur MN .

Comme (MN) est parallèle à (BC) , le théorème de Thalès donne l'égalité des rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$$

On remplace par les valeurs connues, ce qui donne l'égalité :

$$\frac{4}{6} = \frac{MN}{9}$$

On calcule alors MN à l'aide du produit en croix :

$$\begin{aligned} MN &= \frac{4 \times 9}{6} \\ &= \frac{36}{6} \\ &= 6 \end{aligned}$$

La longueur MN est donc égale à 6 cm.

3 Réciproque du théorème de Thalès

Réciproque du théorème de Thalès

On considère trois points A , B et M alignés dans le même ordre que trois points A , C et N .

Si les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$ sont égaux, alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Méthode

Exemple Les points A , M , B sont alignés dans cet ordre, ainsi que les points A , N , C . On donne $AM = 3$ cm, $AB = 5$ cm, $AN = 4,2$ cm et $AC = 7$ cm. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

On calcule séparément chacun des deux rapports :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} = 0,6 \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{4,2}{7} = 0,6$$

Les deux rapports sont égaux et les points sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont donc parallèles.

Attention

Pour appliquer la réciproque, il faut vérifier deux conditions : les points doivent être **alignés dans le même ordre**, et les deux rapports doivent être **égaux**. Si les rapports sont différents, on conclut au contraire que les droites **ne sont pas parallèles**.

À retenir

Triangles semblables : angles égaux deux à deux $\iff$ côtés proportionnels.

Théorème de Thalès : droites parallèles $\Rightarrow$ égalité des rapports $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (on calcule une longueur).

Réciproque : rapports égaux (et même ordre) $\Rightarrow$ droites parallèles (on démontre un parallélisme).

Deux configurations : « triangles emboîtés » et « papillon ».