

FICHE DE COURS

TROISIÈME

Probabilités

Données et fonctions — Chapitre 8

1 Expérience aléatoire et issues

Définition

Une expérience **aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles, appelés **issues**, sont soumis au hasard.

On tire au hasard une boule dans une urne qui contient 6 boules : 2 bleues, 1 blanche et 3 rouges. On s'intéresse à la couleur de la boule obtenue.

Les issues de cette expérience sont : « Bleue », « Blanche » et « Rouge ».

Propriété

La **probabilité d'une issue** est un nombre compris entre 0 et 1 qui exprime la proportion de « chances » que cette issue se réalise. La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

Méthode

Exemple Donner la probabilité de chaque issue de l'expérience précédente, puis vérifier que leur somme vaut 1.

On compte le nombre de boules de chaque couleur sur les 6 boules de l'urne.

Issue	« Blanche »	« Bleue »	« Rouge »
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

On additionne ensuite les trois probabilités :

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

La somme des probabilités de toutes les issues est bien égale à 1.

Propriété — Estimer une probabilité

Lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la **fréquence** d'apparition d'une issue se rapproche de la probabilité de cette issue. On rappelle que la fréquence est le quotient de l'effectif d'une issue par l'effectif total.

On répète 1 000 fois le tirage d'une boule dans l'urne précédente et on relève sa couleur.

Couleur	Blanc	Bleu	Rouge
Effectif	174	341	485
Fréquence	0,174	0,341	0,485

La fréquence d'apparition de la boule rouge, égale à 0,485, est proche de sa probabilité $\frac{3}{6} = 0,5$.

2 Probabilité d'un évènement

Définition

Dans le cadre d'une expérience aléatoire, un **évènement** est constitué des issues qui le réalisent. La **probabilité d'un évènement** est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Lors du lancer d'un dé classique à six faces, l'évènement « Obtenir un multiple de 3 » est réalisé par les issues « 3 » et « 6 ».

Définition

- Un **évènement certain** est réalisé par toutes les issues. Sa probabilité est égale à 1.
- Un **évènement impossible** n'est réalisé par aucune issue. Sa probabilité est égale à 0.

Méthode

Exemple On lance un dé tétraédrique mal équilibré dont les sommets sont numérotés de 1 à 4. Les probabilités sont données ci-dessous.

Issue	1	2	3	4
Probabilité	0,2	0,1	0,4	0,3

Déterminer les probabilités des évènements A , B et C décrits ci-dessous.

L'évènement A , « Obtenir un nombre pair », est réalisé par les issues « 2 » et « 4 » :

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,1 + 0,3 \\ &= 0,4 \end{aligned}$$

L'évènement B , « Obtenir un nombre positif », est certain, donc $P(B) = 1$.

L'évènement C , « Obtenir un nombre supérieur à 5 », est impossible, donc $P(C) = 0$.

Définition et propriété — Évènement contraire

L'**évènement contraire** d'un évènement A est constitué de toutes les issues qui ne réalisent pas A . On le note $\bar{A}$. Sa probabilité est :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Méthode

Exemple Avec le dé tétraédrique précédent, déterminer la probabilité de l'évènement contraire de A .

L'évènement contraire de A est l'évènement $\bar{A}$, « Obtenir un nombre impair ». On utilise la for-

mule de l'évènement contraire :

$$\begin{aligned}P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\&= 1 - 0,4 \\&= 0,6\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir un nombre impair est donc 0,6.

3 Équiprobabilité

Définition et propriété — Équiprobabilité

Les issues d'une expérience aléatoire sont **équiprobables** lorsqu'elles ont toutes la même probabilité. Dans ce cas, la probabilité d'un évènement A est :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues qui réalisent l'évènement}}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Méthode

Exemple On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Déterminer la probabilité de l'évènement B , « Le résultat est inférieur ou égal à 2 ».

Le dé est équilibré, donc les six issues sont équiprobables. L'évènement B est réalisé par les issues « 1 » et « 2 », soit 2 issues favorables sur 6 :

$$\begin{aligned}P(B) &= \frac{2}{6} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

La probabilité de l'évènement B est donc $\frac{1}{3}$.

Attention

La formule $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ ne s'applique que dans le cas de l'**équiprobabilité**, c'est-à-dire lorsque toutes les issues ont la même probabilité. Elle n'est pas valable pour le dé tétraédrique mal équilibré de la section précédente.

Méthode

Exemple On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Déterminer la probabilité de tirer un roi.

Le tirage est effectué au hasard, donc les 32 issues sont équiprobables. Un jeu de 32 cartes contient 4 rois, ce qui donne 4 issues favorables :

$$\begin{aligned}P(\text{« roi »}) &= \frac{4}{32} \\&= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

La probabilité de tirer un roi est donc $\frac{1}{8}$.

Méthode

Exemple Une punaise est lancée 500 fois. Elle retombe 290 fois sur la pointe et 210 fois sur le côté. Estimer la probabilité que la punaise retombe sur la pointe.

La forme de la punaise ne permet pas de calculer directement la probabilité : les deux issues ne sont pas équiprobables. On l'estime donc à l'aide de la fréquence observée sur un grand nombre de lancers :

$$\begin{aligned}f &= \frac{290}{500} \\ &= 0,58\end{aligned}$$

La probabilité que la punaise retombe sur la pointe est donc proche de 0,58. Plus le nombre de lancers est grand, plus cette estimation est fiable.

À retenir

Probabilité d'une issue : nombre entre 0 et 1 ; la somme de toutes les probabilités vaut 1.

Probabilité d'un évènement : somme des probabilités des issues qui le réalisent.

Évènement certain : probabilité 1 ; **évènement impossible** : probabilité 0.

Évènement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Équiprobabilité : $P(A) = \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}}$, uniquement si les issues ont la même probabilité.