

FICHE DE COURS

TROISIÈME

Fonctions affines et linéaires

Nombres et calculs — Chapitre 6

1 Fonctions affines

Définition

Une **fonction affine** f est une fonction qui, à tout nombre x , associe le nombre $ax + b$, où a et b sont deux nombres fixés. On note $f : x \mapsto ax + b$.

- ▶ La fonction $g : x \mapsto -2x + 1$ est affine, avec $a = -2$ et $b = 1$.
- ▶ La fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ est affine, avec $a = 3$ et $b = -2$.

Propriété

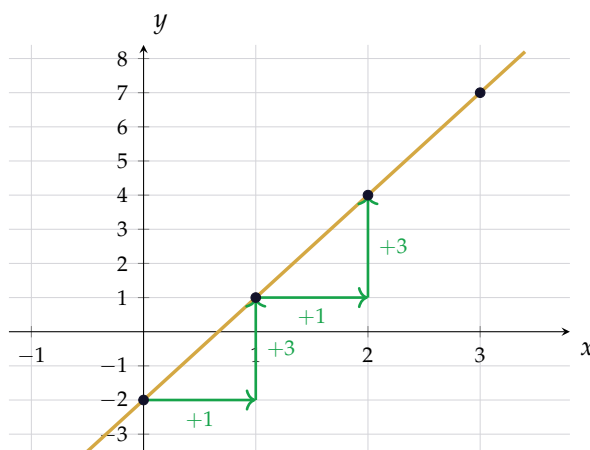
Si f est une fonction affine, alors sa représentation graphique dans un repère est une **droite**.

Méthode

Exemple Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$. Cette fonction est affine, donc sa représentation graphique est une droite. Pour la tracer, deux points suffisent ; on construit un petit tableau de valeurs.

x	0	1	2	3
$f(x)$	-2	1	4	7

On place ensuite ces points dans un repère, puis on trace la droite qui les contient.



À retenir

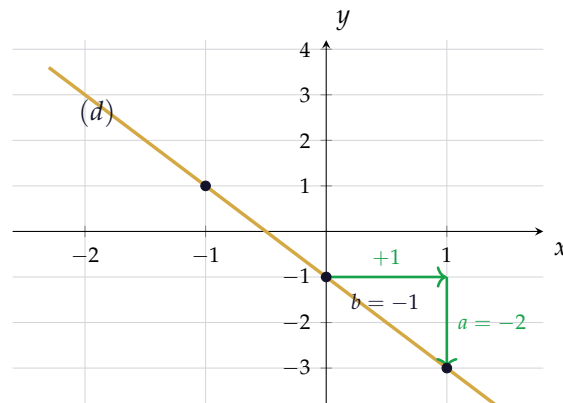
Lorsqu'on ajoute 1 à x , on ajoute a à $f(x)$. Lorsqu'on ajoute 2 à x , on ajoute $2a$ à $f(x)$. L'**accroissement** des images $f(x)$ est donc **proportionnel** à l'accroissement des nombres x .

2 Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

Propriété

Si la représentation graphique d'une fonction f est une droite (d) , alors f est une fonction affine. Son expression s'écrit $f(x) = ax + b$, où :

- a est le **coefficient directeur** de la droite (d) ;
- b est l'**ordonnée à l'origine** de la droite (d) , c'est-à-dire $b = f(0)$.



Méthode

Exemple Lire graphiquement l'expression de la fonction affine représentée par la droite (d) ci-dessus.

On lit d'abord l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées : on trouve $b = -1$.

On part ensuite de ce point, on avance de 1 vers la droite, puis on compte le déplacement vertical nécessaire pour rejoindre la droite : on descend de 2, donc $a = -2$.

La droite (d) représente donc la fonction affine $f : x \mapsto -2x - 1$.

À retenir

Le coefficient directeur est aussi appelé **pente** de la droite. S'il est **positif**, la fonction croît ; s'il est **négatif**, la fonction décroît, c'est-à-dire que si x augmente, alors $f(x)$ diminue.

Méthode

Exemple Déterminer la fonction affine f telle que $f(1) = 5$ et $f(4) = 11$.

Le coefficient directeur se calcule à partir des accroissements :

$$\begin{aligned} a &= \frac{11 - 5}{4 - 1} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

On détermine ensuite b en utilisant l'égalité $f(1) = 5$:

$$\begin{aligned} 2 \times 1 + b &= 5 \\ \Leftrightarrow b &= 3 \end{aligned}$$

La fonction cherchée est donc définie par $f(x) = 2x + 3$. On vérifie ce résultat : $f(4) = 2 \times 4 + 3 = 11$.

3 Fonctions linéaires et proportionnalité

Définition

Une **fonction linéaire** f est une fonction qui, à tout nombre x , associe le nombre ax , où a est un nombre fixé. On note $f : x \mapsto ax$.

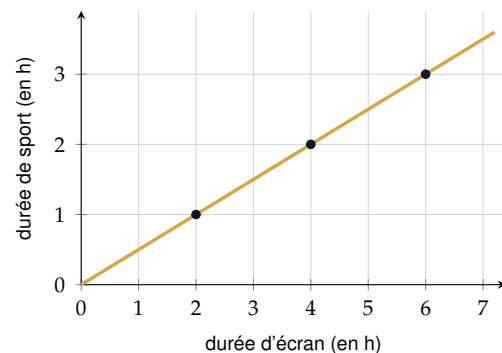
Propriété

- Une fonction linéaire est une fonction affine particulière, obtenue lorsque $b = 0$. Sa représentation graphique est donc une droite qui **passse par l'origine** du repère, de coefficient directeur a .
- Une situation de **proportionnalité** se modélise par une fonction linéaire. Un tableau de valeurs d'une fonction linéaire est donc un **tableau de proportionnalité**, dont le coefficient est le coefficient directeur a .

Pour chaque heure passée devant un écran, Olivia s'impose une demi-heure de sport. La durée de sport est donc la fonction linéaire $f : x \mapsto 0,5x$.

x	2	4	6
$f(x)$	1	2	3

Le nombre 0,5 est à la fois le coefficient directeur de la droite et le coefficient de proportionnalité du tableau.



4 Évolutions en pourcentage

Propriété

Soit p un nombre positif.

- Une **augmentation** de $p\%$ se traduit par une multiplication par $1 + \frac{p}{100}$. Elle correspond à la fonction linéaire $f : x \mapsto \left(1 + \frac{p}{100}\right)x$.
- Une **diminution** de $p\%$ se traduit par une multiplication par $1 - \frac{p}{100}$. Elle correspond à la fonction linéaire $g : x \mapsto \left(1 - \frac{p}{100}\right)x$.

Ces nombres s'appellent des **coefficients multiplicateurs**.

Méthode

Exemple Olivia court 70 min par semaine et souhaite augmenter cette durée de 15%. Calculer sa nouvelle durée de course.

On détermine d'abord le coefficient multiplicateur :

$$1 + \frac{15}{100} = 1,15$$

On applique ensuite la fonction linéaire $f : t \mapsto 1,15t$:

$$\begin{aligned} f(70) &= 1,15 \times 70 \\ &= 80,5 \end{aligned}$$

Olivia court désormais 80,5 min, c'est-à-dire 1 h 20 min 30 s.

Méthode

Exemple Olivia consulte son téléphone 50 min par jour et diminue cette durée de 20 %. Calculer sa nouvelle durée d'écran.

Le coefficient multiplicateur vaut :

$$1 - \frac{20}{100} = 0,8$$

On applique la fonction linéaire $g : t \mapsto 0,8t$:

$$\begin{aligned} g(50) &= 0,8 \times 50 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Olivia consulte désormais son téléphone 40 min par jour.

Attention

Diminuer de 20 % ne revient pas à multiplier par 0,2, mais par 0,8. Le coefficient multiplicateur donne directement la valeur **après** évolution.

À retenir

Fonction affine : $f(x) = ax + b$, représentée par une droite ; a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Fonction linéaire : $f(x) = ax$, cas particulier avec $b = 0$; sa droite passe par l'origine et traduit une proportionnalité.

Deux points suffisent pour tracer une droite.

Pourcentages : augmenter de $p\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{p}{100}$; diminuer de $p\%$, c'est multiplier par $1 - \frac{p}{100}$.