

FICHE DE COURS

TROISIÈME

Équations

Nombres et calculs — Chapitre 3

1 Équation, inconnue et solution

Définition

Une **équation** est une égalité entre deux expressions littérales appelées **membres de l'équation**. Les variables de ces expressions littérales sont les **inconnues** de l'équation.

► L'égalité $3x + 1 = 2x - 10$ est une équation d'inconnue x .

Le membre de gauche est l'expression $3x + 1$ et le membre de droite est l'expression $2x - 10$.

Définition

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie.

Résoudre une équation à une inconnue, c'est trouver toutes les solutions de cette équation.

Méthode

Exemple Le nombre 3 est-il solution de l'équation $3x + 1 = 2x - 10$? Et le nombre -11 ? On calcule séparément la valeur de chaque membre, puis on compare les deux résultats.

Valeur de x	Membre de gauche	Membre de droite	Conclusion
$x = 3$	$3 \times 3 + 1 = 10$	$2 \times 3 - 10 = -4$	3 n'est pas solution
$x = -11$	$3 \times (-11) + 1 = -32$	$2 \times (-11) - 10 = -32$	-11 est solution

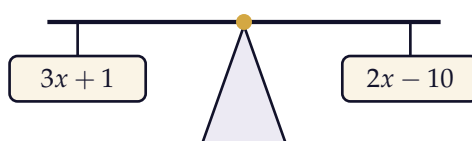
Pour $x = 3$, les deux membres n'ont pas la même valeur, donc l'égalité est fausse. Pour $x = -11$, les deux membres ont la même valeur, donc l'égalité est vraie.

2 Résoudre une équation du premier degré

Propriété

Ajouter ou **soustraire** un même nombre aux deux membres d'une équation ne modifie pas ses solutions.

Multiplier ou **diviser** par un même nombre non nul les deux membres d'une équation ne modifie pas ses solutions.



la balance reste en équilibre

À retenir

Résoudre une équation, c'est comme manipuler une **balance en équilibre** : on effectue la **même opération sur chaque plateau** afin d'isoler l'inconnue.

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $3x + 1 = 2x - 10$.

On regroupe les termes en x dans le membre de gauche et les nombres dans le membre de droite :

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 2x - 10 \\ \Longleftrightarrow 3x + 1 - 2x &= 2x - 10 - 2x \\ \Longleftrightarrow x + 1 &= -10 \\ \Longleftrightarrow x + 1 - 1 &= -10 - 1 \\ \Longleftrightarrow x &= -11 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est -11 .

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $5(x - 2) = 3x + 8$.

On développe d'abord le membre de gauche, puis on isole l'inconnue :

$$\begin{aligned} 5(x - 2) &= 3x + 8 \\ \Longleftrightarrow 5x - 10 &= 3x + 8 \\ \Longleftrightarrow 5x - 10 - 3x &= 3x + 8 - 3x \\ \Longleftrightarrow 2x - 10 &= 8 \\ \Longleftrightarrow 2x &= 18 \\ \Longleftrightarrow x &= \frac{18}{2} \\ \Longleftrightarrow x &= 9 \end{aligned}$$

La solution de cette équation est 9 .

Attention

On effectue toujours la même opération sur **les deux membres** de l'équation. Le signe $\Longleftrightarrow$ se lit « équivaut à » : il indique que la nouvelle équation possède exactement les mêmes solutions que la précédente.

3 Équations produit nul**Définition**

Une **équation produit nul** est une équation dont l'un des membres est un produit d'expressions littérales et dont l'autre membre est zéro.

Propriété

Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul. Les solutions d'une équation produit nul sont donc les valeurs qui annulent ses facteurs :

$$A \times B = 0 \Longleftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $(5x + 5)(9x - 1) = 0$.

Le membre de gauche est un produit de deux facteurs et le membre de droite est nul :

$$\begin{aligned}(5x + 5)(9x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x + 5 &= 0 \text{ ou } 9x - 1 = 0\end{aligned}$$

On résout ensuite chacune des deux équations obtenues.

$$\begin{aligned}5x + 5 &= 0 \\ \Leftrightarrow 5x &= -5 \\ \Leftrightarrow x &= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9x &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont donc -1 et $\frac{1}{9}$.

4 Factoriser pour résoudre une équation

Pour résoudre une équation, il est parfois nécessaire de se ramener à une équation produit nul.

Propriété

Soit a et b deux nombres quelconques :

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Soit K , A et B trois expressions littérales :

$$K \times A + K \times B = K \times (A + B).$$

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $x^2 - 36 = 0$.

On reconnaît une différence de deux carrés, que l'on factorise :

$$\begin{aligned}x^2 - 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 6^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 6)(x + 6) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 6 = 0 \text{ ou } x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 6 \text{ ou } x = -6\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont donc 6 et -6 .

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $(7x + 3)(8x - 1) + (7x + 3)(2x + 5) = 0$.

On repère le facteur commun $(7x + 3)$, puis on factorise le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(7x + 3)(8x - 1) + (7x + 3)(2x + 5) &= 0 \\ \Leftrightarrow (7x + 3)[(8x - 1) + (2x + 5)] &= 0 \\ \Leftrightarrow (7x + 3)(10x + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 7x + 3 = 0 \text{ ou } 10x + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow x = -\frac{3}{7} \text{ ou } x = -0,4\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont donc $-\frac{3}{7}$ et $-0,4$.

5 Équations du type $x^2 = a$

Propriété

Soit a un nombre et x l'inconnue.

- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = 0$ admet une seule solution : 0 .
- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet aucune solution.

Méthode

Exemple Résoudre l'équation $x^2 = 49$.

Le nombre 49 est positif, donc l'équation admet deux solutions :

$$\begin{aligned}x^2 &= 49 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{49} \text{ ou } x = -\sqrt{49} \\ \Leftrightarrow x &= 7 \text{ ou } x = -7\end{aligned}$$

Les solutions de cette équation sont donc 7 et -7 .

Attention

Une équation du type $x^2 = a$ possède le plus souvent **deux** solutions opposées. Oublier la solution négative est une erreur fréquente. En revanche, si l'inconnue représente une longueur, seule la solution positive convient.

À retenir

Tester : on calcule séparément chaque membre, puis on compare les deux résultats.

Premier degré : on regroupe les termes en x d'un côté et les nombres de l'autre, en effectuant la même opération sur les deux membres.

Produit nul : $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$.

Factoriser : face à une équation qui n'est pas du premier degré, on se ramène à un produit nul grâce à $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ou à un facteur commun.