

FICHE DE COURS

TROISIÈME

Puissances et nombres

Nombres et calculs — Chapitre 1

1 Puissances d'exposant positif

Définition

Soit a un nombre relatif et n un nombre entier positif. Le nombre a^n désigne le produit de n facteurs tous égaux à a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}.$$

Le nombre a^n s'appelle une **puissance** de a et le nombre n s'appelle son **exposant**. Cette notation se lit « a exposant n ».

Méthode

Exemple Calculer 4^2 , 7^3 et 10^5 .

On écrit chaque puissance sous la forme d'un produit, puis on effectue le calcul :

$$\begin{aligned} 4^2 &= 4 \times 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^3 &= 7 \times 7 \times 7 \\ &= 343 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^5 &= 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \\ &= 100\,000 \end{aligned}$$

Propriété — Puissances de 10

Pour tout entier positif n , le nombre 10^n s'écrit avec le chiffre 1 suivi de n zéros. Les puissances de 10 d'exposant positif servent donc à écrire les grands nombres.

$$\blacktriangleright 10^5 = 100\,000 \quad \blacktriangleright 10^8 = 100\,000\,000 \quad \blacktriangleright 5\,000 = 5 \times 1\,000 = 5 \times 10^3$$

Attention

Il ne faut pas confondre 5^3 et 5×10^3 .

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \times 5 \times 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \times 10^3 &= 5 \times 1\,000 \\ &= 5\,000 \end{aligned}$$

2 Puissances d'exposant négatif

Définition

Soit a un nombre relatif non nul et n un nombre entier positif. Le nombre a^{-n} est l'**inverse** de a^n :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Méthode

Exemple Écrire 4^{-2} sous forme d'une fraction, puis écrire $\frac{1}{81}$ sous la forme d'une puissance.
On applique la définition de la puissance d'exposant négatif :

$$\begin{aligned} 4^{-2} &= \frac{1}{4^2} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

On décompose ensuite 81 en une puissance de 3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{81} &= \frac{1}{3^4} \\ &= 3^{-4} \end{aligned}$$

Propriété — Puissances de 10 négatives

Pour tout entier positif n , le nombre 10^{-n} s'écrit avec n chiffres après la virgule, le dernier étant un 1 et les autres des zéros. Les puissances de 10 d'exposant négatif servent donc à écrire les nombres proches de 0.

$$\blacktriangleright 10^{-5} = 0,00001 \quad \blacktriangleright 10^{-8} = 0,00000001 \quad \blacktriangleright 0,005 = 5 \times 0,001 = 5 \times 10^{-3}$$

Attention

Il ne faut pas confondre 5^{-3} et 5×10^{-3} .

$$\begin{aligned} 5^{-3} &= \frac{1}{5^3} \\ &= \frac{1}{125} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \times 10^{-3} &= 5 \times 0,001 \\ &= 0,005 \end{aligned}$$

3 Règles de calcul sur les puissances de 10

Propriété

Soit n et p deux nombres entiers relatifs. On a les égalités suivantes :

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p} \quad \frac{10^n}{10^p} = 10^{n-p} \quad (10^n)^p = 10^{n \times p}.$$

On rappelle également que $10^0 = 1$ et que $10^1 = 10$.

Méthode

Exemple Écrire le nombre $A = \frac{10^7 \times 10^{-3}}{10^2}$ sous la forme d'une puissance de 10.

On commence par calculer le produit du numérateur :

$$\begin{aligned} 10^7 \times 10^{-3} &= 10^{7+(-3)} \\ &= 10^4 \end{aligned}$$

On effectue ensuite le quotient :

$$\begin{aligned} A &= \frac{10^4}{10^2} \\ &= 10^{4-2} \\ &= 10^2 \end{aligned}$$

Le nombre A est donc égal à 100.

4 Nombres entiers et nombres premiers

Définition

Un **nombre premier** est un nombre entier supérieur ou égal à 2 qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Les dix premiers nombres premiers sont : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29.

Propriété

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 est soit un nombre premier, soit décomposable en **produit de facteurs premiers**. Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Méthode

Exemple Décomposer le nombre 198 en produit de facteurs premiers.

On divise successivement par les nombres premiers, en commençant par le plus petit :

$$\begin{aligned} 198 &= 2 \times 99 \\ &= 2 \times 3 \times 33 \\ &= 2 \times 3 \times 3 \times 11 \end{aligned}$$

On regroupe enfin les facteurs identiques :

$$198 = 2 \times 3^2 \times 11.$$

Les nombres 2, 3 et 11 sont bien des nombres premiers, car ils n'admettent que deux diviseurs : 1 et eux-mêmes.

5 Nombres décimaux et notation scientifique

Définition

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'exprimer sous la forme $a \times 10^n$, où a et n sont des nombres entiers relatifs.

Définition — Notation scientifique

La **notation scientifique** d'un nombre décimal est son écriture sous la forme $\pm a \times 10^n$ dans laquelle :

- a est un nombre compris entre 1 (inclus) et 10 (exclu) ;
- n est un nombre entier relatif.

Méthode

Exemple Donner la notation scientifique des nombres 835 000 et 0,004 1.

On déplace la virgule pour obtenir un nombre compris entre 1 et 10, puis on compense par une puissance de 10 :

$$\begin{aligned} 835\,000 &= 8,35 \times 100\,000 \\ &= 8,35 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,004\,1 &= 4,1 \times 0,001 \\ &= 4,1 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

6 Nombres rationnels et fractions irréductibles

Définition

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'exprimer sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers.

- ▶ Le nombre 2 peut s'écrire $\frac{2}{1}$: tout nombre entier est donc un nombre rationnel.
- ▶ Le nombre 6,78 peut s'écrire $\frac{678}{100}$: tout nombre décimal est donc un nombre rationnel.

Nombres rationnels

Nombres décimaux

Nombres entiers

-7 0 12

2,5

 $\frac{1}{3}$

Propriété

Un nombre rationnel possède une **unique** écriture fractionnaire dont le numérateur et le dénominateur n'ont que 1 pour diviseur commun. Cette écriture est appelée **fraction irréductible**.

Méthode

Exemple Rendre la fraction $\frac{84}{360}$ irréductible.

On décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers :

$$\begin{aligned} 84 &= 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\ &= 2^2 \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 360 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \\ &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \end{aligned}$$

On simplifie ensuite la fraction par les facteurs communs :

$$\begin{aligned} \frac{84}{360} &= \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5} \\ &= \frac{7}{2 \times 3 \times 5} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

Les nombres 7 et 30 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1, donc la fraction $\frac{7}{30}$ est irréductible.

À retenir

Puissances : a^n est un produit de n facteurs égaux à a , et a^{-n} est l'inverse de a^n .

Puissances de 10 : 10^n s'écrit avec n zéros après le 1, et 10^{-n} avec n chiffres après la virgule.

Notation scientifique : elle s'écrit $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Décomposition : tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme un produit de facteurs premiers, et cette décomposition permet de rendre une fraction irréductible.