DIPLÔME NATIONAL DU BREVET — MATHÉMATIQUES

DNB 2027 — Sujet de référence

Sujet zéro A

Corrigé détaillé — Série générale — Durée 2 h — Coefficient 2

Structure de l'épreuve

Partie 1	Automatismes et applications directes (sans calculatrice)	6 points — 20 min
Partie 2	Raisonnement et résolution de problèmes	14 points — 1h40
	Exercice 1 — Statistiques (moyenne, étendue, médiane)	4 points
	Exercice 2 — Fonctions affines et linéaires, tarifs	4 points
	Exercice 3 — Géométrie (Pythagore, hauteur, Thalès, angles)	4 points
	(dont rédaction et maîtrise de la langue)	2 points

Nouveauté des sujets de référence : la maîtrise de la langue est plus particulièrement évaluée sur les réponses aux questions écrites **en gras** dans l'énoncé (Exercice 1 question 2, Exercice 2 question 2, Exercice 3 question 2.a). Pour ces questions, les réponses ci-dessous sont rédigées en phrases complètes, avec le vocabulaire mathématique attendu.

Partie 1 — Automatismes

6 points — 20 min

Pour chaque question, on indique la réponse correspondante. Aucune justification n'est demandée ni évaluée en Partie 1 (les justifications ci-dessous sont fournies à titre pédagogique). La calculatrice n'est pas autorisée.

Question 1 — Calcul fractionnaire

Calculer $A = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{4}$ sous forme de fraction irréductible.

Réponse

$A = \dfrac{7}{20}$.

On réduit au même dénominateur 20 :

$$A = \frac{3\times 4}{5\times 4} - \frac{1\times 5}{4\times 5} = \frac{12}{20} - \frac{5}{20} = \frac{7}{20}.$$

7 est premier et ne divise pas 20 : la fraction est irréductible.

Question 2 — Puissances de 10

Calculer $B = 3{,}1\times 10^{2} - 5\times 10 + 2{,}1\times 10^{-1}$.

Réponse

$B = 260{,}21$.

$$B = 3{,}1\times 100 - 5\times 10 + 2{,}1\times 0{,}1 = 310 - 50 + 0{,}21 = 260{,}21.$$

Question 3 — Identité remarquable

Calculer $\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

Réponse

Le résultat vaut 13.

On reconnaît $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 5$ et $b = 2\sqrt{3}$:

$$\left(5+2\sqrt{3}\right)\left(5-2\sqrt{3}\right) = 5^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 25 - 4\times 3 = 25 - 12 = 13.$$

Question 4 — Comparer des nombres

Classer par ordre croissant : $1{,}25$; $1+\dfrac{3}{100}$; $1{,}3$; $\dfrac{7}{4}$.

Réponse

$1+\dfrac{3}{100} < 1{,}25 < 1{,}3 < \dfrac{7}{4}$.

On écrit tous les nombres sous forme décimale :

$$1+\frac{3}{100} = 1{,}03\,; \qquad \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Or $1{,}03 < 1{,}25 < 1{,}30 < 1{,}75$.

Piège classique : $1 + \frac{3}{100}$ *vaut* 1,03 *et non* 1,3.

Question 5 — Équation
Résoudre $3x - 2 = 25$.

Réponse

La solution est $x = 9$.

$$\begin{aligned} 3x - 2 = 25 &\iff 3x = 27 \\ &\iff x = \frac{27}{3} = 9. \end{aligned}$$

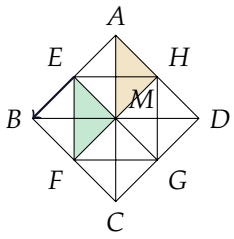
Question 6 — Réduire une expression
Réduire $3a - 1 - 4(2a + 3)$.

Réponse

$3a - 1 - 4(2a + 3) = -5a - 13$**.**
On distribue -4 (attention au signe devant la parenthèse) :

$$3a - 1 - 4(2a + 3) = 3a - 1 - 8a - 12 = -5a - 13.$$

Question 7 — Translation
La figure est composée de 16 triangles rectangles isocèles superposables. Par la translation qui transforme E en B, quel triangle est l'image du triangle AMH ?



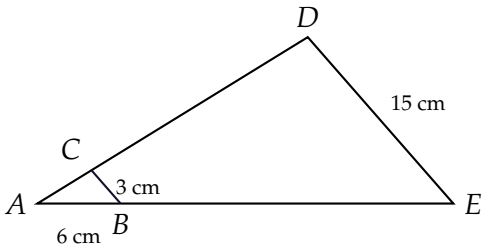
Réponse

L'image du triangle AMH est le triangle EFM.
La translation qui transforme E en B déplace chaque point de la même façon : d'une demi-diagonale de petit carré, vers le bas et vers la gauche. Ainsi :

$$A \longmapsto E, \qquad M \longmapsto F, \qquad H \longmapsto M.$$

(On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{EB}$.) L'image de AMH (en or) est donc EFM (en vert).

Question 8 — Théorème de Thalès
Dans le triangle AED, $B \in [AE]$, $C \in [AD]$ et $(DE) \parallel (CB)$. On donne $AB = 6$ cm, $BC = 3$ cm, $DE = 15$ cm. Déterminer AE.



Réponse

$AE = 30$ **cm.**
Les points A, B, E d'une part et A, C, D d'autre part sont alignés, et $(BC) \parallel (ED)$. D'après le **théorème de Thalès** :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{ED} \qquad \text{donc} \qquad \frac{6}{AE} = \frac{3}{15}.$$

D'où $AE = \dfrac{6 \times 15}{3} = 30$ cm. (Le triangle AED est un agrandissement de rapport 5 du triangle ABC.)

Question 9 — Augmentation en pourcentage
Un objet coûte 15 euros. Quel sera son prix après une augmentation de 20 % ?

Réponse

Nouveau prix : 18 **€.**
Augmenter de 20 % revient à multiplier par $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$:

$$15 \times 1{,}2 = 18\,€.$$

(Ou : $\frac{20}{100} \times 15 = 3\,€$ d'augmentation, puis $15 + 3 = 18\,€$.)

Partie 2 — Raisonnement et résolution de problèmes 14 points

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire. La clarté et la précision des raisonnements ainsi que la rédaction sont évaluées sur **2 points** ; la maîtrise de la langue est plus particulièrement évaluée sur les questions en gras. Toute trace de recherche, même non aboutie, est prise en compte. La calculatrice est autorisée.

Exercice 1 4 points

On compare les salaires mensuels des femmes et des hommes d'une entreprise.

Salaires des 10 femmes
1 500 € ; 1 530 € ; 1 550 € ; 1 600 € ; 1 650 € ; 1 700 € ; 1 800 € ; 2 000 € ; 3 000 € ; 3 500 €

Salaires des hommes
Effectif total : 20
Moyenne : 2 076 €
Étendue : 2 400 €
Médiane : 2 200 €
Salaires tous différents.

1. Comparer le salaire moyen des hommes et celui des femmes.

Réponse

On additionne les 10 salaires des femmes puis on divise par 10 :

$$\begin{aligned}\overline{s}_F &= \frac{1\,500+1\,530+1\,550+1\,600+1\,650+1\,700+1\,800+2\,000+3\,000+3\,500}{10}\\ &= \frac{19\,830}{10} = 1\,983\text{ €}.\end{aligned}$$

Le salaire moyen des hommes est de 2 076 €. Comme $2\,076 > 1\,983$, **le salaire moyen des hommes est supérieur à celui des femmes**, de $2\,076 - 1\,983 = 93$ €.

2. Le plus bas salaire de l'entreprise est 1 480 €. Quel est le montant du salaire le plus élevé ? ***(question évaluée sur la maîtrise de la langue)***

Réponse

Le plus bas salaire des femmes est 1 500 €. Comme le plus bas salaire de l'entreprise est 1 480 €, qui est inférieur à 1 500 €, ce salaire est celui d'un homme : c'est donc le plus bas salaire des hommes.

L'étendue d'une série est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur. L'étendue des salaires des hommes étant de 2 400 €, le plus haut salaire des hommes est :

$$1\,480 + 2\,400 = 3\,880\text{ €}.$$

Le plus haut salaire des femmes est 3 500 €. Puisque $3\,880 > 3\,500$, **le salaire le plus élevé de l'entreprise est de 3 880 €** ; il est perçu par un homme.

3. Dans cette entreprise, combien de personnes gagnent plus de 2 200 € ?

Réponse

Chez les hommes : l'effectif est 20 (nombre pair) et la médiane vaut 2 200 €. La médiane partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif : c'est la moyenne de la 10^{e} et de la 11^{e} valeur. Les salaires étant tous différents, la 10^{e} valeur est inférieure à 2 200 € et la 11^{e} est supérieure : exactement 10 **hommes** gagnent plus de 2 200 €.

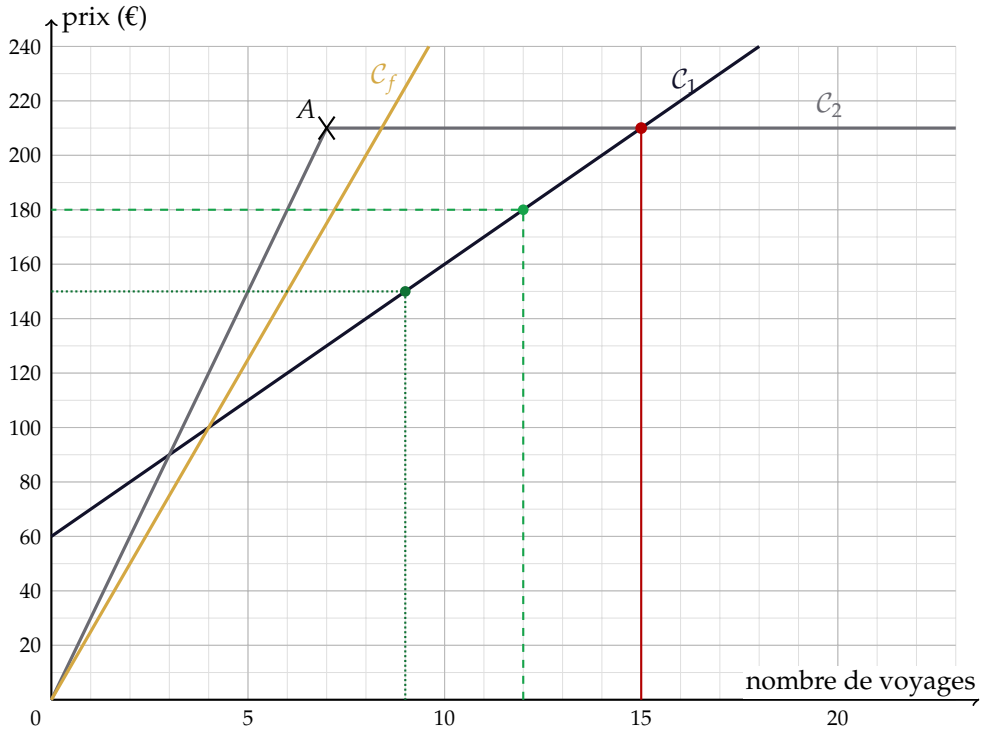
Chez les femmes : seuls les salaires de 3 000 € et 3 500 € dépassent 2 200 €, soit 2 **femmes**.

Au total, $10 + 2 =$ **12 personnes** gagnent plus de 2 200 €.

Exercice 2

4 points

On donne les représentations graphiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de deux fonctions. L'une d'elles représente la fonction affine g définie par $g(x) = 10x + 60$. Sur le graphique ci-dessous figurent aussi les lectures graphiques et la droite de la question 6.



1. Donner par lecture graphique les coordonnées du point A.

Réponse

$A(7\,;\,210)$.

2. Parmi les deux représentations graphiques, laquelle représente la fonction g ? Détailler la justification. ***(question évaluée sur la maîtrise de la langue)***

Réponse

La fonction g est une fonction affine : sa représentation graphique est une droite. De plus, $g(0) = 10 \times 0 + 60 = 60$, donc cette droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\,60)$: son ordonnée à l'origine est 60.

La courbe $\mathcal{C}_2$ n'est pas une droite (elle est formée de deux segments) et elle passe par l'origine du repère. La courbe $\mathcal{C}_1$ est une droite qui passe par le point $(0\,;\,60)$.

La fonction g est donc représentée par la courbe $\mathcal{C}_1$.

Vérification : $g(15) = 10 \times 15 + 60 = 210$ et le point $(15\,;\,210)$ est bien sur $\mathcal{C}_1$.

3. a. Déterminer graphiquement l'image de 12 par la fonction g.

Réponse

On part de l'abscisse 12, on rejoint la droite $\mathcal{C}_1$ et on lit l'ordonnée (tracé vert tireté) : **l'image de 12 par g est 180.**

b. Vérifier la réponse par un calcul.

Réponse

$$g(12) = 10 \times 12 + 60 = 120 + 60 = 180.$$

Le calcul confirme la lecture graphique.

4. Quel est l'antécédent de 150 **par la fonction** g **?**

Réponse

L'antécédent de 150 **par** g **est** 9**.**

Graphiquement (tracé vert pointillé), la droite d'ordonnée 150 coupe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse 9. Par le calcul :

$$\begin{aligned} g(x) = 150 &\iff 10x + 60 = 150 \\ &\iff 10x = 90 \\ &\iff x = 9. \end{aligned}$$

Une compagnie maritime propose trois tarifs :

- **Tarif M** : 25 € par voyage ;
- **Tarif N** : carte annuelle de 60 € puis 10 € par voyage ;
- **Tarif P** : 30 € par voyage jusqu'au 7e voyage, puis les traversées suivantes sont gratuites.

5. Indiquer pour chaque courbe le tarif associé.

Réponse

- Avec le tarif N, le prix pour x voyages est $60 + 10x = g(x)$: $\mathcal{C}_1$ **correspond au tarif N**.
- Avec le tarif P, le prix augmente de 30 € par voyage jusqu'à $7 \times 30 = 210$ €, puis reste égal à 210 € : c'est la courbe qui monte jusqu'au point $A(7\,;\,210)$ puis devient horizontale. $\mathcal{C}_2$ **correspond au tarif P**.

6. Construire la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto 25x$**.**

Réponse

f est une fonction linéaire : sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère. On calcule un second point, par exemple $f(8) = 25 \times 8 = 200$: la droite passe par $(0\,;\,0)$ et $(8\,;\,200)$. C'est la droite $\mathcal{C}_f$ tracée en or sur le graphique ; elle représente le tarif M.

7. Par lecture graphique, à partir de quel nombre de voyages le tarif P devient-il plus avantageux que les deux autres ?

Réponse

Le tarif P est le plus avantageux lorsque la courbe $\mathcal{C}_2$ est *en dessous* des deux autres droites.

- *Comparaison avec le tarif M :* $\mathcal{C}_f$ passe au-dessus de $\mathcal{C}_2$ entre 8 et 9 voyages ; pour 9 voyages, M coûte 225 € contre 210 € pour P.

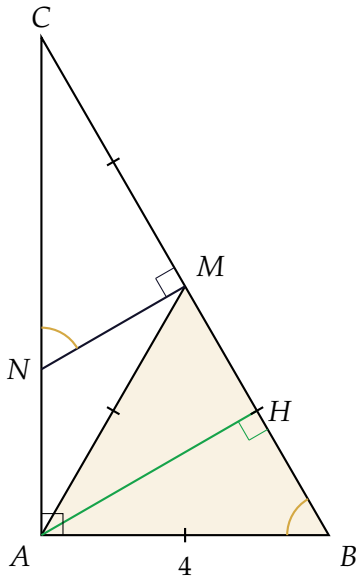
- *Comparaison avec le tarif N :* $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent au point $(15\,;\,210)$ (trait rouge) : pour 15 voyages, N et P coûtent tous deux 210 €. Au-delà, $\mathcal{C}_1$ est au-dessus de $\mathcal{C}_2$.

Le tarif P devient plus avantageux que les deux autres à partir de 16 **voyages** dans l'année (pour 16 voyages : P = 210 €, N = 220 €, M = 400 €).

Exercice 3

4 points

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$; M est le milieu du segment $[BC]$. Le codage de la figure indique : $AB = BM = MC = AM$.



1. Déterminer la longueur AC.

Réponse

M est le milieu de $[BC]$ et le codage donne $BM = AB = 4$, donc $BC = 2 \times 4 = 8$.
Le triangle ABC est rectangle en A, d'hypoténuse $[BC]$. D'après le **théorème de Pythagore** :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{donc} \quad AC^2 = BC^2 - AB^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48.$$

AC étant une longueur positive, $AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \approx 6{,}93$.

2. a. Énoncer la définition de la hauteur issue du point A dans le triangle ABM. *(question évaluée sur la maîtrise de la langue)*

Réponse

Dans le triangle ABM, **la hauteur issue du point A est la droite qui passe par le sommet A et qui est perpendiculaire au côté opposé** $[BM]$, c'est-à-dire perpendiculaire à la droite (BM).

b. On appelle H le pied de la hauteur issue de A dans ABM. Déterminer HB, puis CH.

Réponse

D'après le codage, $AB = BM = AM = 4$: le triangle ABM a ses trois côtés de même longueur, il est **équilatéral**.
Dans un triangle équilatéral, la hauteur issue d'un sommet est aussi la médiane issue de ce sommet : H est donc le milieu de $[BM]$. D'où :

$$HB = \frac{BM}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Les points C, M, H, B sont alignés dans cet ordre sur $[BC]$:

$$CH = CM + MH = 4 + 2 = 6.$$

(On peut aussi écrire $CH = CB - HB = 8 - 2 = 6$.)

3. La parallèle à (AH) passant par M coupe (AC) en N. Calculer la longueur NM.

Réponse

Étape 1 — Calcul de AH. Le triangle AHB est rectangle en H (hauteur), d'hypoténuse $[AB]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$AH^2 = AB^2 - HB^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12, \qquad \text{donc} \qquad AH = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Étape 2 — Théorème de Thalès. Dans le triangle CAH, $M \in [CH]$, $N \in [CA]$ et $(MN) \parallel (AH)$. D'après le **théorème de Thalès** :

$$\frac{CM}{CH} = \frac{CN}{CA} = \frac{MN}{AH} \qquad \text{donc} \qquad \frac{4}{6} = \frac{MN}{2\sqrt{3}}.$$

D'où :

$$MN = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}31.$$

4. Montrer l'égalité des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CNM}$. Détailler la démarche.

Réponse

Le triangle CMN est rectangle en M : la droite (AH) est perpendiculaire à (BC) et (MN) est parallèle à (AH). Or, si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre : $(MN) \perp (BC)$, donc $\widehat{CMN} = 90°$.

Comparaison des triangles CMN et CAB :

- ils ont l'angle $\widehat{C}$ en commun ($\widehat{MCN} = \widehat{BCA}$) ;
- ils ont chacun un angle droit : $\widehat{CMN} = \widehat{CAB} = 90°$.

La somme des angles d'un triangle vaut 180°, donc :

$$\widehat{CNM} = 180° - 90° - \widehat{C} \qquad \text{et} \qquad \widehat{ABC} = 180° - 90° - \widehat{C}.$$

Ainsi $\widehat{ABC} = \widehat{CNM}$.

Remarque : le triangle ABM étant équilatéral, $\widehat{ABC} = \widehat{ABM} = 60°$; donc $\widehat{CNM} = 60°$ également.