DNB de Mathématiques : Polynésie (27 juin 2024)

> Exercice 1

1. Le triangle ABC est rectangle en B

Raisonnement : On teste si l'égalité de Pythagore est vérifiée sachant que [AC] est le plus grand côté.

$AC^2 = 29^2 = 841$ et $AB^2 + BC^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc ABC est rectangle en B.

2. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

Raisonnement : L'expression d'une fonction affine est $f(x) = ax + b$ avec b l'ordonnée à l'origine c'est-à-dire l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe verticale. Ici la droite coupe l'axe des ordonnées en $b = 1$. On peut éliminer les propositions de réponse 1 et 3.

On voit que la droite passe par le point de coordonnées (-2 ; 0). On a donc $f(-2) = 0$. On calcule l'image de -2 par les fonctions restantes et on regarde laquelle donne 0.

Avec $f(x) = 2x + 1$ on $f(-2) = 2 \times (-2) + 1 = -3$. L'image de -2 par f est -3. Ce n'est pas la bonne proposition.

Avec $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ on a $f(-2) = -\frac{2}{2} + 1 = -1 + 1 = 0$. L'image de -2 par f est 0. C'est la bonne proposition.

3. l'homothétie de centre O et de rapport -2

La symétrie et la translation conservent les longueurs. On élimine ces deux propositions.

Le carré 2 est plus grand que le carré 1 donc le rapport de l'homothétie est un nombre supérieur à 1 (en valeur absolue). Les 2 figures sont de part et d'autre du centre de l'homothétie. Donc le rapport est négatif.

On a $OE = 2OC$ donc $k = -2$.

4. 30 cl de jus de fruit de la passion

Raisonnement : Le ratio 10 : 6 : 2 signifie que les proportions des 3 jus ananas : passion : citron sont $\frac{10}{10+6+2}$; $\frac{6}{10+6+2}$ et $\frac{2}{10+6+2}$

Le jus de fruit de la passion (2e valeur) représente donc $\frac{6}{18}$ du cocktail.

$$\frac{6}{18} \times 90 = 30$$

On peut utiliser un tableau de proportionnalité pour gérer les ratios :

ratio	10	6	2	10+6+2=18
volume (cL)				90

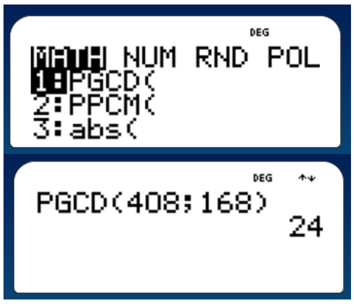
Par produit en croix, on retrouve les volumes des 3 jus de fruits.

5. 24 sacs

<ins>*Raisonnement :*</ins> Il s'agit de déterminer le PGCD de 408 et 168.

Sur TI : Appuie sur la touche **MATHS** et choisi **1 : PGCD(**

Saisi ensuite les deux nombres séparés par un point-virgule.



La méthode vue en classe consiste à décomposer en produits de facteurs premiers les deux nombres et à garder les facteurs premiers communs aux deux nombres :

$408 = 2^3 \times 3 \times 17$

$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

Le plus grand diviseur commun est $2^3 \times 3$ soit 24.

> **Exercice 2**

1. Il y a 5 éditions dont le coût réel a été supérieur ou égal à 10 milliards d'euros : Athènes, Pékin, Londres, Rio de Janeiro et Tokyo.

2. Deux manières de calculer un pourcentage d'augmentation :

Avec la formule : $p = \frac{Valeur\ finale - Valeur\ initiale}{Valeur\ initiale}$

$$p = \frac{16{,}5 - 9}{9} \times 100 = 0{,}83$$

$$p = \frac{83}{100} = 83\%$$

Avec un tableau de proportionnalité :

valeur	9	16,5
pourcentage	100	183

En passant de 100 à 183 on conclut que la hausse est de 83%.

Le pourcentage d'augmentation entre le coût prévisionnel et le coût réel des JO de Rio de Janeiro en 2016 est de 83%.

3. Déterminons la moyenne m :

$$m = \frac{9{,}3 + 2{,}3 + 5{,}5 + 10 + 31 + 11 + 16{,}5 + 12{,}1}{8}$$

$$m = \frac{97{,}7}{8}$$

$$m = 12{,}2$$

Le coût réel moyen entre 1992 et 2021 est de 12,2 milliards d'euros.

4. a. Cette affirmation est fausse. Le journaliste confond la moyenne avec la médiane. Classons les coûts réels dans l'ordre croissant et déterminons la médiane :

2,3 – 5,5 – 9,3 – 10 – 11 – 12 ,1 – 16,5 – 31

La médiane est de 10,5.

La moitié des éditions entre 1992 et 2021 ont un coût réel supérieur ou égal à 10,5 milliards d'euros.

4.b. Appelons x le cout prévisionnel des JO de Paris 2024, la 9eme édition des JO depuis 1992.

Le coût prévisionnel moyen m se calcule alors avec la relation :

$$m = \frac{3{,}5 + 1{,}8 + 3 + 5{,}3 + 2{,}6 + 4{,}8 + 9 + 13 + x}{9} = \frac{43 + x}{9}$$

Et on sait que le coût prévisionnel moyen vaut 5,5 milliards d'euros ;

$$5{,}5 = \frac{43 + x}{9}$$

$$\Leftrightarrow 5{,}5 \times 9 = 43 + x$$

$$\Leftrightarrow 49{,}5 = 43 + x$$

$$\Leftrightarrow 49{,}5 - 43 = x$$

$$\Leftrightarrow x = 6{,}5$$

Le coût prévisionnel des JO de Paris 2024 est de 6,5 milliards d'euros.

> **Exercice 3**

1.a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = 15^2 + 27^2$$

$$AB^2 = 225 + 729$$

$$AB^2 = 954$$

$$AB \text{ est une longueur positive :}$$

$$AB = \sqrt{954}$$

$$AB = 31\ m$$

Alyssa est à 31 m de distance du bord de la piscine.

1.b. Les droites (JH) et (DE) sont perpendiculaires à la droite (FE) donc (JH) et (DE) sont parallèles.

(HE) et (DJ) se coupent en F.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{FD}{FJ} = \frac{FE}{FH} = \frac{DE}{JH}$$

$$\frac{FD}{15} = \frac{18}{7}$$

$$FD = \frac{15 \times 18}{7} = 38{,}6$$

$$JD = FD - FJ$$

$$JD = 38{,}6 - 15$$

$$JD \approx 24\ m$$

Jules est à 24 m du bord de la piscine.

1.c.

$24 < 31$ donc Jules est plus proche d'un bord de la piscine qu'Alyssa.

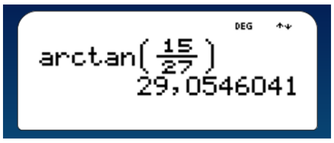
2. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a d'après la trigonométrie :

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$

(Remarque : on choisit la tangente car les deux longueurs sont connues avec certitude. Cela évite de reporter une éventuelle erreur réalisée lors du calcul de AB à la question 1).

$$\tan(\widehat{ABC}) = \frac{15}{27}$$

$$\widehat{ABC} = 29°$$



L'angle d'inclinaison $\widehat{ABC}$ mesure 29°. Il est inférieur à la norme de sécurité de 35° maximum.

Le gradin norme respecte la norme.

3. Déterminons le nombre de panneaux photovoltaïques qui recouvrent le toit :

Surface d'un panneau : $1 \times 1{,}7 = 1{,}7\ m^2$

$$\frac{4678{,}4}{1{,}7} = 2752$$

2752 panneaux photovoltaïques recouvrent le toit du Centre Aquatique Olympique.

$$2752 \times 350 = 963\ 200$$

Chaque panneau produisant 350 kWh, les 2752 panneaux produisent 963 200 kWh d'énergie annuellement.

4. Déterminons le volume d'eau dans la piscine :

$$V = L \times l \times p$$

$$V = 50 \times 25 \times 3$$

$$V = 3750\ m^3$$

Il faut chauffer 3750 m^3 d'eau.

$$3750 \times 9{,}3 = 34\ 875$$

Pour chauffer ces 3750 m^3 d'eau de 18°C à 26°C, il faut une énergie de 34 875 kWh.

> **Exercice 4**

1.

2^{e} tirage / 1er tirage	3	5
5	15	25
2	6	10
3	9	15

2. Il y a un total de 6 résultats possibles et 2 manières seulement d'obtenir 15.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La probabilité d'obtenir 15 comme résultat est de $\frac{1}{3}$.

3. Parmi les résultats figurant dans le tableau de l'annexe, les multiples de 3 sont 6, 9,15 et 15.

Il y a 4 multiples de 3 parmi les 6 résultats. La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est de $\frac{4}{6}$ soit $\frac{2}{3}$.

L'affirmation est vraie.

4. Les numéros des boules dans les deux premières boîtes sont des nombres premiers. Décomposons 165 et 78 en produits de facteurs premiers.

$165 = 3 \times 55 = 3 \times 5 \times 11$ et $78 = 2 \times 39 = 2 \times 3 \times 13$

Comme les numéros 2, 3 et 5 sont des nombres inscrits sur les boules des 2 premières boîtes, on peut en déduire que les boules de la 3^{e} boîte portent les numéros 11 et 13.

> **Exercice 5**

Partie A

1.

$$f(-4) = (-4+2)^2 - (-4)$$

Ne pas oublier les parenthèses autour de -4 !!

$$f(-4) = (-2)^2 + 4$$

$$f(-4) = 4 + 4$$

$$f(-4) = 8$$

2. On résout $g(x) = 3$

$$7x + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow 7x = 3 - 4$$

$$\Leftrightarrow 7x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x}{7} = -\frac{1}{7}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{7}$$

Un antécédent de 3 par g est $-\frac{1}{7}$.

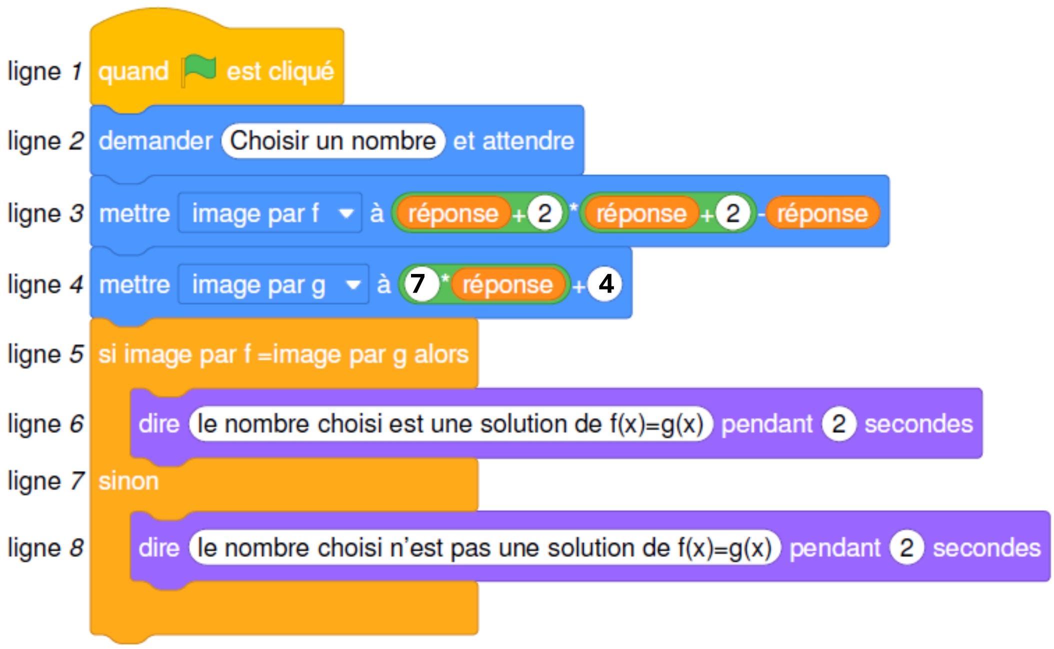
Partie B

1.a. Dans la cellule B3, Paul a saisi la formule « $= 7 * B1 + 4$ »

*(Remarques : les formules des tableurs commencent toujours par =. On utilise la formule de la fonction g. Le symbole de la multiplication est une étoile *. Les nombres qui remplacent x sont sur la ligne 1. Pour avoir le résultat en B3, il faut utiliser le nombre en B1).*

1.b. On remarque que le nombre de la ligne 1 qui donne les mêmes résultats sur les lignes 2 et 3 est 0. Paul trouve que l'équation $f(x) = g(x)$ a une solution entre -3 et 3 qui est $x = 0$.

2.a. On complète la ligne 4 afin d'avoir l'expression de $g(x)$.



2.b. D'après la question 1.b. si on choisit 0 comme nombre de départ, on obtient le même résultat : 4. Le programme affiche « le nombre choisi est une solution de f(x)=g(x) ».

2.c. Une solution de l'équation $f(x) = g(x)$ est $x = 0$.

3.a. On pose $f(x) = g(x)$

$$(x+2)^2 - x = 7x + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x+2) - x = 7x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2x + 4 - x = 7x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 4 = 7x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 7x + 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$

3.b. Factorisons :

$$x^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0$$

3.c. Résolvons l'équation précédente :

$$x(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \;\; ou \;\; x = 4$$

$$S = \{0; 4\}$$

L'équation $f(x) = g(x)$ a deux solutions $x = 0$ et $x = 4$.

4. Paul n'a pas résolu l'équation $f(x) = g(x)$ car il n'a trouvé qu'une solution $x = 0$. Son intervalle d'étude entre -3 et 3 est trop petit pour trouver la deuxième solution $x = 4$.

Jane n'a pas résolu l'équation $f(x) = g(x)$ car elle ne teste pas de nombres supérieurs à 3. Or la deuxième solution est $x = 4$. Elle n'a trouvé que la première solution $x = 0$.

Morgane a résolu l'équation $f(x) = g(x)$ car il a trouvé toutes les solutions par le calcul sans tester de nombres. Il est donc sûr d'avoir toutes les solutions de l'équation.