ÉQUATIONS DE DROITES

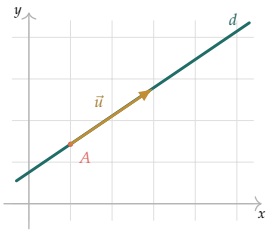
— SECONDE —

1. ÉQUATION CARTÉSIENNE ET VECTEUR DIRECTEUR

Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$

Un **vecteur directeur** de cette droite est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

- un vecteur directeur donne la **direction** de la droite ; tout vecteur qui lui est colinéaire convient aussi ;
- $M(x\,;y)$ appartient à la droite si et seulement si ses coordonnées **vérifient** l'équation ;
- une même droite a une **infinité** d'équations cartésiennes (on peut tout multiplier par un réel non nul).



Une droite est entièrement déterminée par **un point** et **un vecteur directeur**.

2. ÉQUATION RÉDUITE

Si la droite n'est **pas parallèle** à l'axe des ordonnées :

$$y = mx + p$$

- m : **coefficient directeur** (la pente) ;
- p : **ordonnée à l'origine** ;
- vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad (x_A \neq x_B)$$

Les droites **parallèles à l'axe des ordonnées** ont une équation de la forme $x = k$: elles n'ont **pas** d'équation réduite.

3. DÉTERMINER L'ÉQUATION D'UNE Ddroite

À partir de deux points

$A(1\,;5)$ et $B(3\,;-1)$.

$m = \dfrac{-1-5}{3-1} = \dfrac{-6}{2} = -3$

$y = -3x + p$; avec A : $5 = -3 + p$ donc $p = 8$.

$(AB) : y = -3x + 8$.

À partir d'un point et d'un vecteur directeur

$\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ donne l'équation $ax + by + c = 0$; on calcule c en remplaçant x et y par les coordonnées du point connu.

4. POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

Soit d : $y = mx + p$ et d' : $y = m'x + p'$:

- $m \neq m'$: les droites sont **sécantes** ;
- $m = m'$ et $p \neq p'$: elles sont **strictement parallèles** ;
- $m = m'$ et $p = p'$: elles sont **confondues**.

Avec des équations cartésiennes $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$: les droites sont parallèles $\iff ab' - a'b = 0$ (déterminant des vecteurs directeurs nul).

Point d'intersection

On résout le **système** formé par les deux équations.

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$$

$2x - 1 = -x + 5 \iff 3x = 6 \iff x = 2$, puis $y = 3$.

Les droites se coupent en $I(2\,;3)$.

Toujours **vérifier** le résultat en remplaçant dans les deux équations.

5. PASSER D'UNE FORME À L'AUTRE

Cartésienne → réduite

$3x + 2y - 8 = 0 \iff 2y = -3x + 8 \iff y = -\dfrac{3}{2}x + 4$

Donc $m = -\dfrac{3}{2}$ et $p = 4$.

Réduite → cartésienne

$y = 5x - 2 \iff 5x - y - 2 = 0$

Vecteur directeur : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6. ERREURS À ÉVITER

Le vecteur directeur de $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$: attention à l'**ordre** et au **signe**.

Une droite verticale $x = k$ n'a **pas** de coefficient directeur.

Dans $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, les points doivent être pris **dans le même ordre** au numérateur et au dénominateur.

À RETENIR

- Un point et un vecteur directeur déterminent une droite.
- Vecteur directeur de $ax + by + c = 0$: coordonnées $-b$ et a.
- $y = mx + p$: m la pente, p l'ordonnée à l'origine.
- Parallèles $\iff$ même coefficient directeur, ou $ab' - a'b = 0$.

pierre-carree.fr