COLINÉARITÉ ET PARALLÉLISME

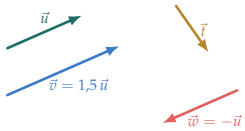
— SECONDE —

1. VECTEURS COLINÉAIRES

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$ (avec $\vec{u} \neq \vec{0}$).

- ils ont la **même direction** : leurs supports sont parallèles ;
- le sens est le même si $k > 0$, opposé si $k < 0$;
- le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à **tout** vecteur.

« Colinéaires » ne veut pas dire « sur la même droite » : les vecteurs sont libres de leur origine. Deux droites parallèles portent des vecteurs colinéaires.



$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires ; $\vec{t}$ ne l'est pas.

2. LE DÉTERMINANT

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Critère de colinéarité

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \iff xy' - x'y = 0$$

On dispose les coordonnées **en colonnes**, puis on calcule le produit en diagonale descendante moins le produit en diagonale montante.

3. APPLICATION DU CRITÈRE

Exemple 1

$\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v}) = 3 \times 4 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$

Les vecteurs sont **colinéaires** (on a bien $\vec{v} = -2\vec{u}$).

Exemple 2

$\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det(\vec{u},\vec{v}) = 5 \times 3 - 2 \times 1 = 13 \neq 0$

Les vecteurs ne sont **pas colinéaires**.

4. PARALLÉLISME ET ALIGNEMENT

Droites parallèles $(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\iff \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 0$

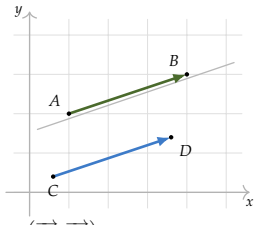
Points alignés A, B, C alignés $\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\iff \det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 0$

Exemple d'alignement

$A(1\,;2)$, $B(4\,;3)$, $C(10\,;5)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det = 3 \times 3 - 9 \times 1 = 0$: les points A, B et C sont **alignés**.



$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right) = 0$ donc $(AB) \parallel (CD)$.

5. MÉTHODES À MAÎTRISER

Prouver un parallélisme

Calculer les coordonnées des deux vecteurs, puis le déterminant, et conclure en citant le critère.

Prouver un alignement

Choisir **un même point de départ** (par exemple A) pour les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Trouver un paramètre

Écrire $\det = 0$: on obtient une **équation** d'inconnue le paramètre cherché, qu'il reste à résoudre.

6. À NE PAS CONFONDRE

$\det = 0$ prouve que les droites sont **parallèles**, pas qu'elles sont **confondues** : il faut de plus un point commun.

Trois points alignés ne signifie pas que B est **entre** A et C : le déterminant ne donne aucune information de position.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})$: l'ordre change le signe, mais pas la nullité.

À RETENIR

Colinéaires $\iff$ il existe k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

$\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - x'y$: colinéaires $\iff$ déterminant nul.

Parallélisme : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$; alignement : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\det = 0$ donne aussi l'équation qui détermine un paramètre.

pierre-carree.fr