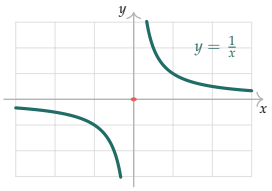
LA FONCTION INVERSE

— SECONDE —

1. COURBE, VARIATIONS ET PROPRIÉTÉS



L'**hyperbole**, en deux branches, symétrique par rapport à l'origine O.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$		‖	$\searrow$	

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, **décroissante sur** $]-\infty\,;0[$ **et sur** $]0\,;+\infty[$ — mais **pas** sur $\mathbb{R}^*$ entier.

- 0 est une **valeur interdite** : $\frac{1}{0}$ n'existe pas ;
- $\frac{1}{x}$ est du **signe de** x, et ne s'annule jamais ;
- $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$: fonction **impaire**, courbe symétrique par rapport à l'origine.

2. ÉQUATIONS AVEC L'INVERSE

Pour $k \neq 0$:

$$\frac{1}{x} = k \iff x = \frac{1}{k} \quad (\text{et } x \neq 0)$$

$\dfrac{1}{x} = 0$ n'a **aucune solution** : l'hyperbole ne coupe pas l'axe des abscisses.

Exemple

$$\frac{1}{x} = -4 \iff x = -\frac{1}{4} \qquad \mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

3. INÉQUATIONS AVEC L'INVERSE

Interdit : multiplier les deux membres par x sans connaître le **signe** de x !

On distingue donc deux cas, ou l'on passe par un tableau de signes.

Exemple : $\frac{1}{x} \leq 2$

- si $x < 0$: $\frac{1}{x} < 0 \leq 2$, toujours vrai.
- si $x > 0$: $\frac{1}{x} \leq 2 \iff 1 \leq 2x \iff x \geq \frac{1}{2}$.

$\mathcal{S} =]-\infty\,;0[\cup \left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$

4. INÉQUATIONS QUOTIENT

Méthode

1. Chercher les **valeurs interdites** (dénominateur nul).
2. Tout ramener dans un membre : $\cdots \geq 0$, au **même dénominateur**.
3. Factoriser, puis dresser le **tableau de signes** : le quotient suit la règle des signes du produit.
4. Exclure les valeurs interdites de la solution.

La **double barre** signale une valeur interdite : le crochet y est **toujours ouvert**.

Résoudre $\frac{2x-4}{x+1} \geq 0$: valeur interdite -1, racine 2.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
quotient		$+$	‖	$-$	0	$+$	

$\mathcal{S} =]-\infty\,;-1[\cup [2\,;+\infty[$ (-1 exclu, 2 inclus car l'inégalité est large)

5. COMPARER DEUX INVERSES

Passer à l'inverse **change l'ordre**, à condition que les deux nombres soient **de même signe** :

- si $0 < a \leq b$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$
- si $a \leq b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$

Exemples

$2 \leq 5$ donc $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{5}$

Mais $-2 \leq 3$ et $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{3}$: signes différents, aucune règle.

6. ERREURS À ÉVITER

Ne jamais écrire que la fonction inverse est décroissante **sur** $\mathbb{R}^*$: elle l'est sur chacun des deux intervalles.

Ne pas multiplier une inéquation par x : le signe de x est inconnu.

Ne pas oublier d'**exclure** la valeur interdite de l'ensemble solution.

À RETENIR

- L'hyperbole : décroissante sur chaque branche, jamais nulle.
- 0 est valeur interdite : toujours la repérer en premier.
- Ne jamais multiplier une inéquation par x de signe inconnu.
- Quotient : double barre dans le tableau, crochet ouvert.

pierre-carree.fr