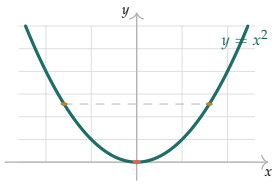
LA FONCTION CARRÉ

— SECONDE —

1. COURBE, VARIATIONS ET PROPRIÉTÉS



La **parabole** de sommet O, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		↘	0	↗	

$x \mapsto x^2$ est **décroissante** sur $]-\infty\,;0]$ et **croissante** sur $[0\,;+\infty[$; elle admet un **minimum** 0 en $x = 0$.

- $x^2 \geq 0$ pour tout réel x ;
- $(-x)^2 = x^2$: la fonction est **paire**, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- deux nombres opposés ont le même carré : $a^2 = b^2 \iff a = b$ ou $a = -b$.

2. ÉQUATIONS DU TYPE $x^2 = k$

- si $k > 0$: **deux solutions** $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$
- si $k = 0$: **une seule solution** $x = 0$
- si $k < 0$: **aucune solution** dans $\mathbb{R}$

Exemples

$x^2 = 7 \iff x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$

$3x^2 - 27 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3$ ou $x = 3$

$x^2 + 5 = 0$: impossible car $x^2 \geq 0$, donc $\mathcal{S} = \varnothing$

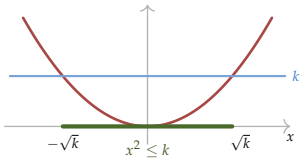
On peut aussi factoriser : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, puis appliquer la règle du produit nul.

3. INÉQUATIONS $x^2 \leq k$ ET $x^2 \geq k$

Pour $k > 0$, on lit les solutions sur la parabole :

$$x^2 \leq k \iff -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$$

$$x^2 \geq k \iff x \leq -\sqrt{k} \text{ ou } x \geq \sqrt{k}$$



Si $k < 0$: $x^2 \leq k$ est impossible et $x^2 \geq k$ est vraie pour tout réel.

4. INÉQUATIONS PRODUIT

Méthode

1. Tout ramener dans un membre : $\cdots \geq 0$ (ou ≤ 0).
2. **Factoriser** l'expression obtenue.
3. Étudier le signe de chaque facteur (affine : signe de a après sa racine).
4. Multiplier les signes dans un **tableau de signes**.
5. Lire l'ensemble solution sur la dernière ligne.

Une double barre marque une **valeur interdite** ; un 0 marque une racine, à inclure si l'inégalité est large.

Résoudre $(3-x)(2x+1) \geq 0$: racines 3 et $-\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le produit est positif ou nul entre les racines : $\mathcal{S} = \left[-\frac{1}{2}\,;3\right]$

5. COMPARER DEUX CARRÉS

La fonction carré ne conserve l'ordre que sur les **positifs** :

- si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$
- si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$

Exemples

$2 \leq 5$ donc $4 \leq 25$ (ordre conservé)

$-5 \leq -2$ mais $25 \geq 4$ (ordre inversé)

C'est la traduction du sens de variation : croissante sur $[0\,;+\infty[$, décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

6. ERREURS À ÉVITER

$\sqrt{x^2} = |x|$ et non x : par exemple $\sqrt{(-4)^2} = 4$.

$x^2 = 9$ a **deux** solutions -3 et 3 ; écrire seulement $x = 3$ est incomplet.

$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$: il manque le double produit $2ab$.

$x^2 \geq k$ ne donne pas $x \geq \sqrt{k}$ seul : il faut aussi $x \leq -\sqrt{k}$.

À RETENIR

La parabole $y = x^2$: décroissante puis croissante, minimum 0.

$x^2 = k$: deux, une ou zéro solution selon le signe de k.

$x^2 \leq k \iff -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$ (pour $k > 0$).

Inéquation produit : ramener à 0, factoriser, tableau de signes.

pierre-carree.fr