ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

— SECONDE —

1. RÉSOUDRE UNE ÉQUATION

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer toutes les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie : ce sont les **solutions**.

On ne change pas les solutions d'une équation en :
- ajoutant un même nombre aux deux membres ;
- multipliant les deux membres par un même nombre **non nul**.

Chaque étape s'écrit avec le symbole d'**équivalence** $\iff$: les deux lignes ont exactement les mêmes solutions.

Méthode générale

1. Tout ramener dans le membre de gauche : $\cdots = 0$.
2. Développer si besoin, puis **factoriser**.
3. Appliquer la règle du produit nul.

Exemple

$3x-7 = x+5 \iff 3x-x = 5+7 \iff 2x = 12 \iff x = 6$
$\mathcal{S} = \{6\}$

2. ÉQUATION PRODUIT NUL

$$A \times B = 0 \iff A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Exemple

$(2x-6)(x+1) = 0$
$\iff 2x-6 = 0$ ou $x+1 = 0$
$\iff x = 3$ ou $x = -1 \qquad \mathcal{S} = \{-1\,;3\}$

Il faut d'abord factoriser

$x^2-9 = 5(x-3)$
$\iff (x-3)(x+3)-5(x-3) = 0$
$\iff (x-3)(x+3-5) = 0 \iff (x-3)(x-2) = 0$
$\mathcal{S} = \{2\,;3\}$

3. ÉQUATION QUOTIENT NUL

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \text{ et } B \neq 0$$

Étape 0 : déterminer les valeurs interdites, celles qui annulent le dénominateur.

Exemple

$\dfrac{x^2-4}{x-1} = 0$ avec $x \neq 1$ (valeur interdite)
$\iff x^2-4 = 0 \iff (x-2)(x+2) = 0$
$\iff x = 2$ ou $x = -2$; les deux sont autorisées.
$\mathcal{S} = \{-2\,;2\}$

4. INTERVALLES DE $\mathbb{R}$

Intervalle	Inégalité	Représentation
$[a\,;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	
$[a\,;+\infty[$	$x \geq a$	
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	

Le crochet est **toujours ouvert** du côté de l'infini. $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$.

Intersection et réunion

$x \in I \cap J$: x appartient **aux deux** intervalles.
$x \in I \cup J$: x appartient **à l'un au moins** des deux.

$[-3\,;4] \cap]1\,;+\infty[=]1\,;4]$
$]-\infty\,;0] \cup]2\,;5[$ ne se simplifie pas.

Une représentation sur un axe évite toutes les erreurs de bornes.

5. VALEUR ABSOLUE ET DISTANCE

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad |x| \geq 0$$

$|a-b|$ = distance entre a et b sur la droite graduée

Équations et inéquations

$|x-a| = r \iff x = a-r$ ou $x = a+r$
$|x-a| \leq r \iff x \in [a-r\,;a+r]$
$|x-a| \geq r \iff x \leq a-r$ ou $x \geq a+r$

Exemple : $|x-2| \leq 3$ signifie « x est à une distance au plus 3 de 2 », soit $x \in [-1\,;5]$.

6. RÉSOUDRE UNE INÉQUATION

On ne change pas le sens d'une inégalité en ajoutant un nombre ou en multipliant par un nombre **strictement positif**.
Multiplier ou diviser par un nombre **strictement négatif change le sens** de l'inégalité.

Exemple

$-2x+1 > 7 \iff -2x > 6 \iff x < -3$
$\mathcal{S} =]-\infty\,;-3[$

Inéquation produit ou quotient

Tout ramener à 0, factoriser, puis dresser un **tableau de signes** : on applique la règle des signes ligne par ligne, et on lit l'intervalle solution sur la dernière ligne.

À RETENIR

- Tout ramener à 0, factoriser, puis produit nul ou tableau de signes.
- Multiplier une inégalité par un négatif inverse le sens.
- Un quotient : chercher les valeurs interdites avant tout.
- Écrire la solution sous forme d'ensemble ou d'intervalle.

pierre-carree.fr