

Nombres et arithmétique

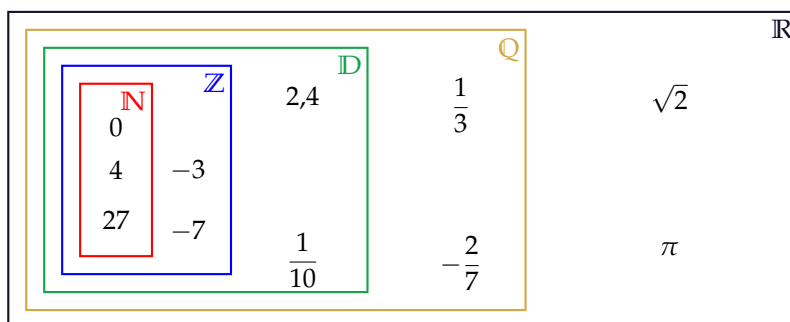
SECONDE

1 Les ensembles de nombres

Définition

On distingue plusieurs **ensembles de nombres**, chacun contenant le précédent :

- $\mathbb{N}$: ensemble des **entiers naturels** ($0, 1, 2, 3, \dots$)
- $\mathbb{Z}$: ensemble des **entiers relatifs** ($\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$)
- $\mathbb{D}$: ensemble des **décimaux** (nombres à écriture décimale finie)
- $\mathbb{Q}$: ensemble des **nombres rationnels** (quotients de deux entiers)
- $\mathbb{R}$: ensemble de **tous** les nombres, rationnels et irrationnels



Propriété

On a la chaîne d'inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Tout nombre réel peut se placer sur une **droite graduée**.

Méthode

Exemple : -7 est un entier relatif ($\mathbb{Z}$) mais pas un entier naturel ($\mathbb{N}$).

Exemple : $\frac{1}{3}$ est un rationnel ($\mathbb{Q}$) mais pas un décimal ($\mathbb{D}$), car son écriture décimale $0,333\dots$ ne s'arrête jamais.

Exemple : $\sqrt{2}$ et π sont des réels ($\mathbb{R}$) mais ne sont pas rationnels : on dit qu'ils sont **irrationnels**.

2 Calcul littéral

Propriété

Distributivité :

$$k(a + b) = ka + kb \quad (\text{on développe})$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (\text{on développe un produit de deux sommes})$$

La lecture de droite à gauche permet de **factoriser** par k .

Propriété

Identités remarquables, pour tous réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Méthode

Exemple : Développer $(x + 3)^2$:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Exemple : Factoriser $x^2 - 25$: on reconnaît $a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 5$.

$$x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$$

3 Puissances**Définition**

Pour tout réel a et tout entier naturel n :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$$

Si $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ et $a^0 = 1$

Propriété

Pour tous réels non nuls a, b et tous entiers relatifs m, n :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \qquad a^n \times b^n = (a \times b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Méthode

Exemple : $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

Exemple : $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4 = 625$

Exemple : $(3^2)^3 = 3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$

4 Racines carrées

Propriété

Pour a réel positif :

$$\sqrt{a^2} = a$$

Pour a, b réels positifs (avec $b \neq 0$ dans le second cas) :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour a réel quelconque :

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Méthode

Exemple : $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

Exemple : $\sqrt{(-4)^2} = |-4| = 4$ (attention : ce n'est pas -4 !)

5 Arithmétique

Définition

Pour tous entiers relatifs a et b (avec $b \neq 0$) :

- a est un **multiple** de b , et b est un **diviseur** de a , s'il existe un entier relatif q tel que $a = b \times q$.
- a est **pair** s'il existe un entier n tel que $a = 2n$; a est **impair** s'il existe un entier n tel que $a = 2n + 1$.
- a est un nombre **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Propriété

La fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si le seul diviseur positif commun à a et b est 1.

Méthode

Exemple : 18 est un multiple de 6 car $18 = 6 \times 3$; donc 6 est un diviseur de 18.

Exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... sont des nombres premiers ; 1 n'est pas premier (il n'a qu'un seul diviseur).

Exemple : $\frac{15}{20}$ n'est pas irréductible (5 divise les deux termes) : $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, qui elle est irréductible.