

Fonction inverse

SECONDE

1 Expression de la fonction inverse

Définition

La **fonction inverse** est la fonction définie pour tout réel $x \neq 0$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

À retenir

Le nombre 0 **n'a pas d'image** par la fonction inverse : son ensemble de définition est $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Méthode

Exemple : $f(2) = \frac{1}{2}$.

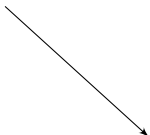
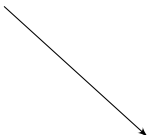
Exemple : $f(-4) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

Exemple : $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$.

2 Variations

Propriété

La fonction inverse est **décroissante** sur $] -\infty ; 0[$ et **décroissante** sur $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
Variation de $\frac{1}{x}$				

À retenir

Attention : la fonction inverse est décroissante **sur chacun des deux intervalles séparément**, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ tout entier (on ne peut pas comparer une valeur négative et une valeur positive de cette façon).

Méthode

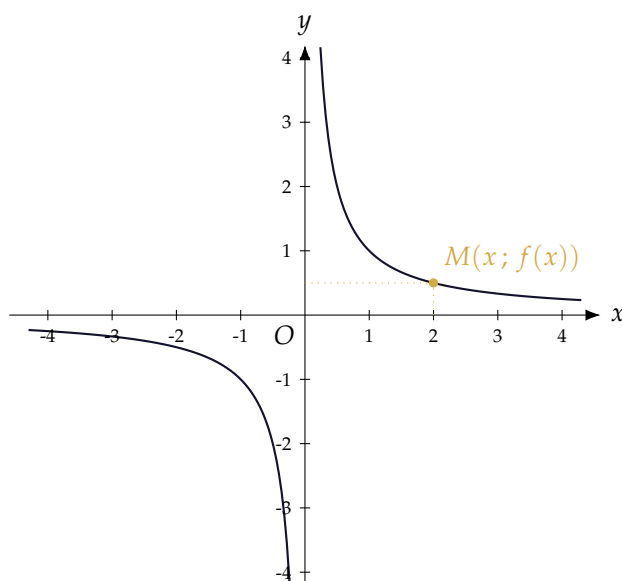
Exemple : Sur $]0; +\infty[$, si $3 < 7$ alors, la fonction inverse étant décroissante, $\frac{1}{3} > \frac{1}{7}$.

Exemple : Sur $] -\infty; 0[$, si $-5 < -2$ alors $\frac{1}{-5} > \frac{1}{-2}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$.

3 Représentation graphique

Propriété

La courbe représentative de la fonction inverse est une **hyperbole**, formée de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y = \frac{1}{x}$. Elle est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère.

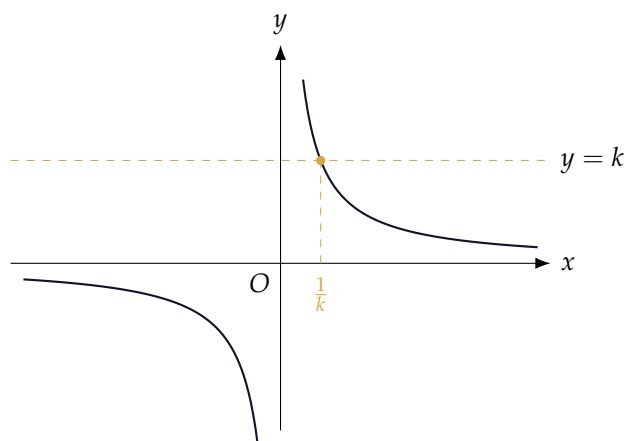


4 Équation $\frac{1}{x} = k$

Propriété

Soit k un nombre réel **non nul**. L'équation $\frac{1}{x} = k$ admet une **unique** solution :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{k} \right\}$$



À retenir

Si $k = 0$, l'équation $\frac{1}{x} = 0$ n'a pas de solution : un inverse n'est jamais nul.

Méthode

Exemple : Résoudre $\frac{1}{x} = 4$: $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Exemple : Résoudre $\frac{1}{x} = -2$: $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Exemple : Résoudre $\frac{1}{x} = 0$: aucune solution, $\mathcal{S} = \emptyset$.

5 Signe et inéquations

Propriété

Le signe de $\frac{1}{x}$ est le **même** que celui de x : $\frac{1}{x}$ est strictement négatif sur $] -\infty ; 0[$ et strictement positif sur $] 0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $\frac{1}{x}$	$-$		$+$

À retenir

Une inéquation du type $\frac{1}{x} < k$ (ou $\frac{1}{x} \geq k$, etc.) admet une infinité de solutions ; l'ensemble des solutions se détermine à l'aide des **variations** de la fonction inverse (en séparant $x < 0$ et $x > 0$) et s'écrit à l'aide d'**intervalles**.

Méthode

Exemple : Résoudre $\frac{1}{x} > 0$: d'après le tableau de signes, $\mathcal{S} =] 0 ; +\infty[$.

Exemple : Résoudre $\frac{1}{x} \leq 0$: comme $\frac{1}{x}$ n'est jamais nul, $\mathcal{S} =]-\infty; 0[$.

6 Inéquations quotient

Propriété

Pour résoudre une inéquation du type $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$ ou $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$, on étudie séparément le signe de $A(x)$ et le signe de $B(x)$, puis on combine les deux dans un **tableau de signes**. La valeur qui annule $B(x)$ est **exclue** de l'ensemble des solutions (elle rend le quotient impossible).

Méthode

Exemple : Résoudre $\frac{2x-3}{x+1} \geq 0$.

On annule chaque facteur : $2x-3=0 \iff x=\frac{3}{2}$ et $x+1=0 \iff x=-1$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $2x-3$	$-$	$-$	0	$+$
Signe de $x+1$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $\frac{2x-3}{x+1}$	$+$	$-$	0	$+$

À retenir

Le quotient $\frac{2x-3}{x+1}$ est positif ou nul sur $]-\infty; -1[\cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

On a donc $\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ (la valeur -1 est exclue).