

Étude globale de fonctions

SECONDE

1 Définition d'une fonction

Définition

Une **fonction** f définie sur un ensemble D est un procédé qui, à tout nombre réel x appartenant à D , associe un **unique** nombre réel noté $f(x)$, qui se lit « f de x ». On note :

$$x \longmapsto f(x)$$

À retenir

D est l'**ensemble de définition** de la fonction f . On le détermine en cherchant toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ existe.

Méthode

Exemple : Pour $f(x) = \frac{1}{x-2}$, il faut $x-2 \neq 0$: f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Exemple : Pour $g(x) = \sqrt{x+3}$, il faut $x+3 \geq 0$: g est définie sur $D = [-3; +\infty[$.

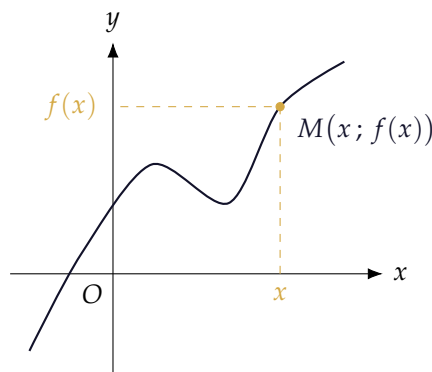
2 Courbe représentative d'une fonction

Définition

La **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ pour $x \in D$. On dit que $y = f(x)$ est l'**équation** de $\mathcal{C}_f$.

À retenir

Si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y (ou de $f(x)$), et que y est l'**image** de x par la fonction f .



Méthode

Exemple : Sur la courbe ci-dessus, l'image de $x = 2,6$ par f est environ 2,6 : on lit $f(2,6) \approx 2,6$.

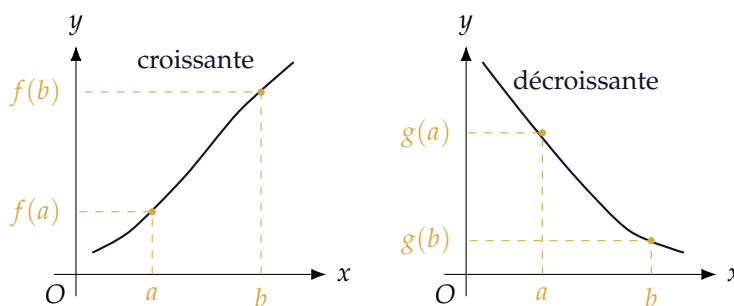
Exemple : Réciproquement, 2,6 est un antécédent de 2,6 par f (il peut y en avoir d'autres, non visibles sur cet extrait de courbe).

3 Variation d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si, pour tous réels a et b de I : $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$ (les images sont rangées dans le **même ordre**).
- f est **décroissante** sur I si, pour tous réels a et b de I : $a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$ (les images sont rangées dans l'**ordre contraire**).



À retenir

On résume les variations d'une fonction dans un **tableau de variation**, à l'aide de flèches montantes (croissante) ou descendantes (décroissante).

x	-4	-2	1	4
Variation de f	-1,8	2,4	-2,2	3,4

Méthode

Exemple : D'après ce tableau, f est **croissante** sur $[-4; -2]$, **décroissante** sur $[-2; 1]$, puis à nouveau **croissante** sur $[1; 4]$.

4 Extremum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur $[a; b]$ et $\alpha \in [a; b]$.

- $f(\alpha)$ est le **minimum** de f sur $[a; b]$ (atteint en α) si, pour tout $x \in [a; b]$: $f(x) \geq f(\alpha)$.
- $f(\alpha)$ est le **maximum** de f sur $[a; b]$ (atteint en α) si, pour tout $x \in [a; b]$: $f(x) \leq f(\alpha)$.

x	a	α	b
Variation de f	$f(a)$	$f(\alpha)$	$f(b)$

À retenir

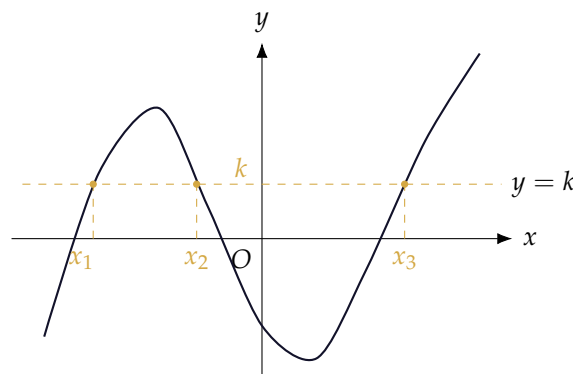
Un extremum **minimum** est atteint au creux d'un tableau de variation (flèche descendante puis montante). Un extremum **maximum** est atteint au sommet (flèche montante puis descendante).

Méthode

Exemple : Dans le tableau de variation de la section précédente, $f(-2) = 2,4$ est un **maximum local** et $f(1) = -2,2$ est un **minimum local** de f sur $[-4; 4]$.

5 Résolution graphique d'équations et d'inéquations**Propriété**

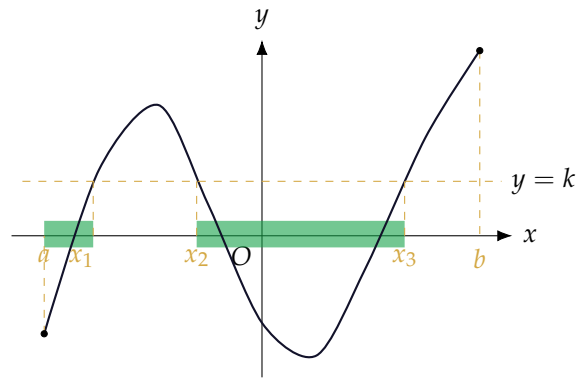
Résoudre $f(x) = k$ revient à chercher les **abscisses des points d'intersection** de $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale d'équation $y = k$.

**À retenir**

Sur cette courbe, $f(x) = k$ admet trois solutions : $\mathcal{S} = \{x_1; x_2; x_3\}$.

Propriété

Résoudre $f(x) \leq k$ revient à chercher les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **en dessous ou sur** la droite $y = k$.

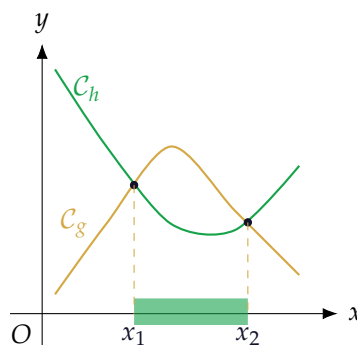


À retenir

Sur $[a; b]$, $f(x) \leq k$ a pour ensemble de solutions (en vert) $\mathcal{S} = [a; x_1] \cup [x_2; x_3]$.

Propriété

Résoudre $g(x) \leq h(x)$ revient à chercher les abscisses des points où la courbe de g est **en dessous** ou **sur** celle de h .



À retenir

Sur cette figure, $g(x) \leq h(x)$ (en vert) a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = [x_1; x_2]$.

Méthode

Exemple : Pour résoudre graphiquement $f(x) = k$, on trace la droite $y = k$ et on relève les abscisses des points d'intersection avec $\mathcal{C}_f$.

Exemple : Pour résoudre $g(x) \leq h(x)$, on repère les intersections des deux courbes, puis on regarde où la courbe de g passe sous celle de h .