

Colinéarité et parallélisme

SECONDE

1 Déterminant de deux vecteurs

Définition

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors le **déterminant** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$$

Méthode

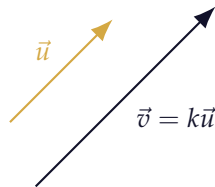
Exemple : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 3 \times 5 - 2 \times 4 = 15 - 8 = 7$$

2 Vecteurs colinéaires

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.



À retenir

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

$$\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ont la même direction (s'ils sont non nuls)}$$

$$\iff \text{les coordonnées de } \vec{u} \text{ et de } \vec{v} \text{ sont proportionnelles}$$

$$\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Méthode

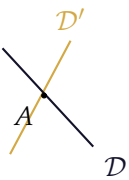
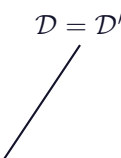
Exemple : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$: les vecteurs sont **colinéaires** (on a d'ailleurs $\vec{v} = 3\vec{u}$).

Exemple : Si $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors $\det(\vec{u}, \vec{w}) = 2 \times 5 - 3 \times 4 = 10 - 12 = -2 \neq 0$: les vecteurs **ne sont pas** colinéaires.

3 Positions relatives de deux droites du plan

Propriété

Dans le plan, deux droites sont soit **parallèles**, soit **sécantes**.

Sécantes	Parallèles	
	Strictement	Confondues
		
$D \cap D' = \{A\}$ (le point A)	$D \cap D' = \emptyset$ (aucun point commun)	$D \cap D' = D = D'$ (tous les points de D et D')

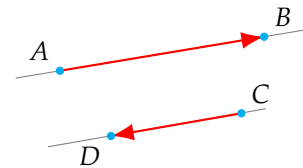
4 Parallélisme et alignement

Propriété

(AB) et (CD) sont parallèles

$\iff$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

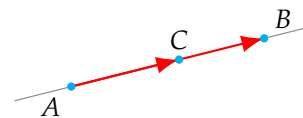


Propriété

A, B et C sont alignés

$\iff$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires



Méthode

Exemple : $A(1; 2)$, $B(4; 8)$, $C(-1; -2)$. On calcule $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 3 \times (-4) - 6 \times (-2) = -12 + 12 = 0$$

Les vecteurs sont colinéaires donc les points A, B et C sont **alignés**.

À retenir

Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, ou que trois points sont alignés, on calcule un **déterminant** : s'il vaut 0, les vecteurs sont colinéaires et la propriété est vraie.