

Fonction carré

SECONDE

1 La fonction carré

Définition

La **fonction carré** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Méthode

Exemple : $f(3) = 3^2 = 9$.

Exemple : $f(-5) = (-5)^2 = 25$.

Exemple : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

À retenir

Le carré d'un nombre réel est **toujours positif ou nul** : pour tout réel x , $x^2 \geq 0$. Deux nombres opposés ont le même carré : $(-x)^2 = x^2$.

2 Variations

Propriété

La fonction carré est **décroissante** sur $] -\infty ; 0]$.

La fonction carré est **croissante** sur $[0 ; +\infty [$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variation de x^2			

Méthode

Exemple : Sur $] -\infty ; 0]$, si $-3 < -1$ alors $(-3)^2 > (-1)^2$, c'est-à-dire $9 > 1$: la fonction carré **change** l'ordre, car elle est décroissante sur cet intervalle.

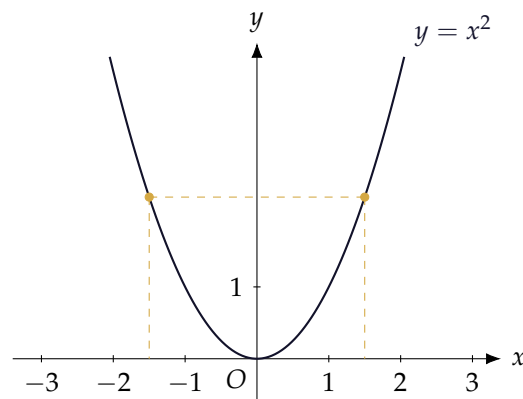
Exemple : Sur $[0 ; +\infty [$, si $2 < 5$ alors $2^2 < 5^2$, c'est-à-dire $4 < 25$: la fonction carré **conserve** l'ordre, car elle est croissante sur cet intervalle.

3 Représentation graphique

Propriété

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction carré est une **parabole**, de sommet O , l'origine du repère.

Cette parabole est **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées : pour tout réel x , les points d'abscisses x et $-x$ ont la même ordonnée x^2 .



Méthode

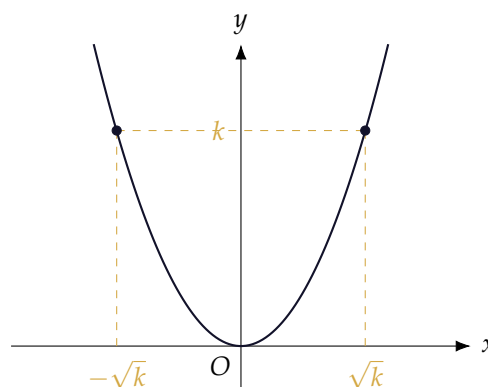
Exemple : Les points de coordonnées $(2; 4)$ et $(-2; 4)$ appartiennent tous les deux à la parabole : ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4 Équations

Propriété

Pour un nombre réel k , l'équation $x^2 = k$ a pour ensemble de solutions S :

- si $k > 0$: $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$ (**deux** solutions)
- si $k = 0$: $S = \{0\}$ (**une** solution)
- si $k < 0$: $S = \emptyset$ (**aucune** solution)



Méthode

Exemple : Résoudre $x^2 = 16$: comme $16 > 0$, $S = \{-4; 4\}$.

Exemple : Résoudre $x^2 = 0$: $S = \{0\}$.

Exemple : Résoudre $x^2 = -9$: comme $-9 < 0$, $S = \emptyset$.

5 Inéquations**Propriété**

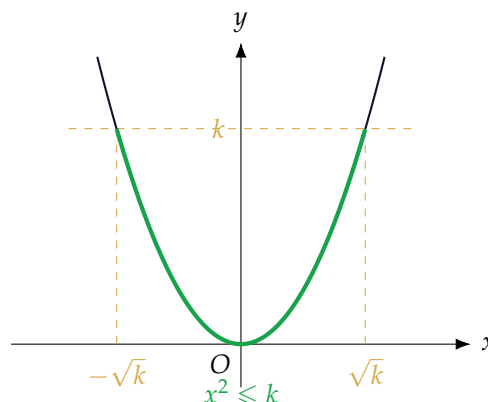
Pour un nombre réel k , l'inéquation $x^2 \leq k$ a pour ensemble de solutions S :

- si $k > 0$: $S = [-\sqrt{k}; \sqrt{k}]$
- si $k = 0$: $S = \{0\}$
- si $k < 0$: $S = \emptyset$

Propriété

Pour un nombre réel k , l'inéquation $x^2 \geq k$ a pour ensemble de solutions S :

- si $k > 0$: $S =]-\infty; -\sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$
- si $k \leq 0$: $S = \mathbb{R}$

**Méthode**

Exemple : Résoudre $x^2 \leq 9$: comme $9 > 0$, $S = [-3; 3]$.

Exemple : Résoudre $x^2 \geq 4$: comme $4 > 0$, $S =]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

Exemple : Résoudre $x^2 \geq -1$: comme $-1 \leq 0$, $S = \mathbb{R}$.

6 Inéquation produit**Définition**

Une **inéquation produit** est une inéquation qui peut s'écrire sous la forme $(ax + b)(cx + d) \leq 0$ (ou ≥ 0), avec a, b, c et d des nombres réels.

Propriété

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(ax + b)(cx + d) \leq 0$ (ou ≥ 0), on étudie, dans un tableau, le **signe** de chaque facteur, puis le **signe du produit** en utilisant la règle des signes. On utilise ensuite ce tableau pour conclure.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
Signe de $(ax + b)$	—	0	+	+
Signe de $(cx + d)$	—	—	0	+
Signe du produit	+	0	—	+

Méthode

Exemple : Résoudre $(2x - 6)(-x + 1) \leq 0$:

On cherche les racines et le signe de chaque facteur : $2x - 6 \geq 0 \iff x \geq 3$ et $-x + 1 \geq 0 \iff x \leq 1$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
Signe de $(2x - 6)$	—	—	0	+
Signe de $(-x + 1)$	+	0	—	—
Signe du produit	—	0	+	—

L'ensemble des solutions est $S =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$.

À retenir

On ne conclut **jamais** directement le signe d'un produit sans passer par un tableau de signes : le signe de chaque facteur dépend de x , et **change** au passage de sa racine.