

Fonction affine, fonction valeur absolue

SECONDE

1 Fonctions affine et valeur absolue

Définition

Une **fonction affine** est définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :

$$f(x) = mx + p$$

où m et p sont des réels.

- Si $p = 0$, alors $f(x) = mx$ et f est une fonction **linéaire**.
- Si $m = 0$, alors $f(x) = p$ et f est une fonction **constante**.

Définition

La **fonction valeur absolue** est définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est positif} \\ -x & \text{si } x \text{ est négatif} \end{cases}$$

Méthode

Exemple : $f(x) = 3x - 2$ est une fonction affine, avec $m = 3$ et $p = -2$.

Exemple : $f(x) = -\frac{1}{2}x$ est une fonction **linéaire** ($p = 0$).

Exemple : $f(x) = 5$ est une fonction **constante** ($m = 0$).

2 Variations

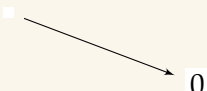
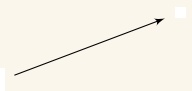
Propriété

Variation d'une fonction affine $f(x) = mx + p$:

- Si $m > 0$, la fonction affine f est **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m < 0$, la fonction affine f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
- Si $m = 0$, la fonction affine est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Variation de la fonction valeur absolue :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

Méthode

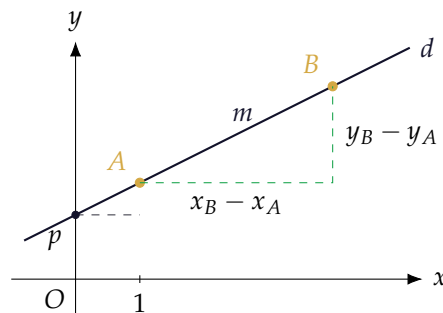
Exemple : $f(x) = -2x + 1$ a pour coefficient $m = -2 < 0$: f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$.

3 Représentations graphiques**Propriété**

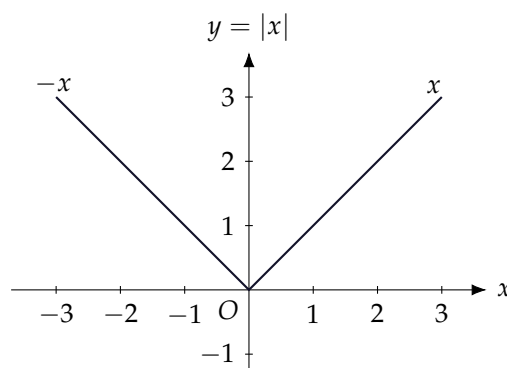
La représentation graphique d'une fonction affine d'expression $f(x) = mx + p$ est une **droite** d .

- $y = mx + p$ est l'**équation réduite** de la droite d .
- m est le **coefficient directeur** (ou pente) de la droite d .
- p est l'**ordonnée à l'origine**.
- Pour deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ de d , avec $x_A \neq x_B$:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

**Propriété**

Représentation graphique de la fonction valeur absolue : une courbe en forme de « V », symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Méthode**

Exemple : Une droite passe par $A(1; 2)$ et $B(3; 8)$:

$$m = \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

4 Signe d'une fonction affine

Définition

La **racine** d'une fonction affine f est le réel x_0 tel que $f(x_0) = 0$.

Propriété

Cas où $m > 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$+$

Pour tout réel $x < x_0$, on a $f(x) < 0$. Pour tout réel $x > x_0$, on a $f(x) > 0$.

Propriété

Cas où $m < 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$-$

Pour tout réel $x < x_0$, on a $f(x) > 0$. Pour tout réel $x > x_0$, on a $f(x) < 0$.

Propriété

Cas où $m = 0$: pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de p .

Méthode

Exemple : $f(x) = 2x - 6$: la racine vérifie $2x_0 - 6 = 0 \iff x_0 = 3$. Comme $m = 2 > 0$, $f(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f(x) > 0$ pour $x > 3$.

5 Équations et inéquations avec valeur absolue

Propriété

Équations $|x| = k$:

$$\mathcal{S} = \{-k; k\} \text{ si } k > 0 \quad \mathcal{S} = \{0\} \text{ si } k = 0 \quad \mathcal{S} = \emptyset \text{ si } k < 0$$

Propriété

Inéquations $|x| \leq k$:

$$\mathcal{S} = [-k; k] \text{ si } k > 0 \quad \mathcal{S} = \{0\} \text{ si } k = 0 \quad \mathcal{S} = \emptyset \text{ si } k < 0$$

Propriété**Inéquations** $|x| \geq k$:

$$\mathcal{S} =]-\infty; -k] \cup [k; +\infty[\text{ si } k > 0 \quad \mathcal{S} = \mathbb{R} \text{ si } k \leq 0$$

Méthode*Exemple :* $|x| = 4 \iff x \in \{-4; 4\}$ *Exemple :* $|x| \leq 4 \iff x \in [-4; 4]$ *Exemple :* $|x| \geq 4 \iff x \in]-\infty; -4] \cup [4; +\infty[$ **À retenir**

Pour résoudre une équation ou une inéquation avec valeur absolue, on identifie d'abord la forme $|x| = k$, $|x| \leq k$ ou $|x| \geq k$, puis on applique directement la propriété correspondante.