Suites numériques

<table>
<tr><td colspan="2">Modes de génération :
- forme explicite $u_n = f(n)$ - forme récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$
Sens de variation :
- Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$
- Etude des variations de la fonctions associée $f(x)$ dans le cas des formes explicites.
- Comparaison entre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 pour une suite à termes strictement positifs.</td></tr>
<tr><td>Suites arithmétiques
$u_{n+1} = u_n + r$

$u_n = u_0 + n \times r, \forall\, n \in \mathbb{N}$
$u_n = u_1 + (n-1) \times r, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
$u_n = u_p + (n-p) \times r$

$S = \frac{u_0 + u_n}{2} \times (n+1)$</td><td>Suites géométriques
$u_{n+1} = u_n \times q$

$u_n = u_0 \times q^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$
$u_n = u_1 \times q^{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
$u_n = u_p \times q^{n-p}$

$S = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$</td></tr>
</table>

<u>Exercice 1</u>

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 5 - (n-2)^2$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Exprimer u_{n+1} et u_{2n} en fonction de n. (forme développée et réduite attendue)
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice 2</u>

On note (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + n^2 - 2$.

1) Donner la valeur des 4 premiers termes de la suite. Détailler les calculs.
2) Étudier la sens de variation de la suite (v_n).
3) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de v_{20}.

<u>Exercice 3</u>

Camille et Dominique ont été embauchés au même moment dans une entreprise et ont négocié leur contrat à des conditions différentes :

- Camille a commencé en 2020 avec un salaire annuel de 14 400 € alors que le salaire de Dominique était, cette même année, de 13 200 €
- Le salaire de Camille augmente de 600 € par an alors que celui de Dominique augmente de 4% par an.

1. Quels étaient les salaires annuels de Camille et de Dominique en 2021 ?

2. On modélise les salaires de Camille et de Dominique à l'aide de suites.

a. On note u_n le salaire de Camille en l'année $2020 + n$. On a donc $u_0 = 14400$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.

c. Déterminer, par le calcul, en quelle année le salaire de Camille dépassera 20 000 €.

d. On note v_n le salaire de Dominique en l'année $2020 + n$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

e. Calculer le salaire de Dominique en 2030. On arrondira le résultat à l'euro.

3. On veut déterminer à partir de quelle année le salaire de Dominique dépassera celui de Camille.

Pour cela, on dispose du programme incomplet ci-dessous écrit en langage Python.

Compléter les parties en pointillés de ce programme.

```
def algo():
  A=14400
  B=13200
  n=0
  while ............. :
    A=A+600
    B=........
    n=..........
  return(n)
```

Exercice 4

Des algues prolifèrent dans un étang. Pour s'en débarrasser, le propriétaire installe un système de filtration. En journée, la masse d'algues augmente de 2 %, puis à la nuit tombée, le propriétaire actionne pendant une heure le système de filtration qui retire 100 kg d'algues. On admet que les algues ne prolifèrent pas la nuit. Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est égale à 2 000 kg. On modélise la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours par une suite notée (a_n).

En particulier : $a_0 = 2000$. On admet que cette modélisation demeure valable tant que a_n reste positif.

1. Vérifier par le calcul que la masse a_2 d'algues après deux jours de fonctionnement du système de filtration est égale à 1 878,8 kg.

2. On affirme que pour tout entier naturel n, on a $a_{n+1} = 1{,}02a_n - 100$.

a. Justifier la relation précédente à l'aide de l'énoncé.

b. On considère la suite (b_n) définie pour tout nombre entier naturel n par $b_n = a_n - 5000$.

Démontrer que la suite (b_n) est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

c. Pour tout entier naturel n, en déduire une expression de b_n en fonction de n, puis montrer que $a_n = 5000 - 3000 \times 1{,}02^n$.

d. Quelle quantité d'algues y aura-t-il au bout de 20 jours (arrondir au kg) ?

3. Au bout de combien de jours les algues auront-elles disparu ?