Ex 1 :

1) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})\cdot(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC})$

$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont de sens contraire. $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BG}\perp\overrightarrow{EB}$.

ainsi $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = -AB\times EB + 0 + 0 + BG\times BC$

$= -a\times b + b\times a$

$= 0$

donc $(AG)\perp(EC)$

2) Dans $(A\,;\ \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}\,;\ \frac{1}{a}\overrightarrow{AD})$

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $E(1+b;0)$ $G(1;b)$

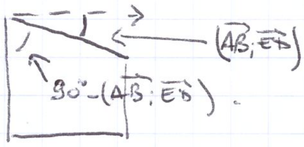
et $C(1;1)$

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1-0\\ b-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\ b\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}1-(1+b)\\ 1-0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}-b\\ 1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC} = 1\times(-b) + b\times 1 = 0$

donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{EC}$ et $(AG)\perp(EC)$.

Ex 2



1. $\vec{AB}\cdot\vec{ED} = AB \times AB = 16$.

$\vec{AB}\cdot\vec{ED} = AB \times ED \times \cos(\vec{AB};\vec{ED})$

$\cos(\vec{AB};\vec{ED}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{ED}}{AB \times ED} = \dfrac{16}{4 \times 2\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$(\vec{AB};\vec{ED}) = 26,6°$ donc $(\vec{EA};\vec{ED}) = 90 - 26,6 = 63,4°$

$\widehat{AED} = 63,4°$ ⚠ Attention, l'angle $\widehat{AED}$ est complémentaire à l'angle entre $\vec{AB}$ et $\vec{AE}$. ⚠

2) $\vec{EA}\cdot\vec{EC} = EA \times EC \times \cos(\widehat{AEC})$

$= 4 \times \sqrt{5} \times \cos(63,4)$

$= 4$

$\vec{EA}\cdot\vec{EC} = \frac{1}{2}(EA^2 + EC^2 - AC^2)$

$AC^2 = -2\,\vec{EA}\cdot\vec{EC} + EA^2 + EC^2$

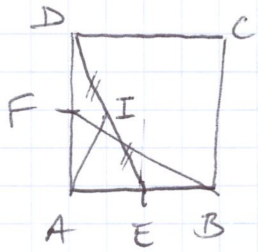
$AC^2 = -2 \times 4 + 4^2 + \sqrt{5}^2$

$AC^2 = 13$

$AC = \sqrt{13}$

$AC \approx 3,6$ cm.

Ex 3 :



$$\vec{AI} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{ED}$$
$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{AI}\cdot\vec{BF} = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right)\cdot\vec{BF}$$
$$= \frac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{BF} + \frac{1}{2}\vec{AD}\cdot\vec{BF}$$
$$= \frac{1}{4}\vec{AB}\cdot\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AD}\cdot\vec{AF}$$
$$= -\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{2}AD \times AF$$
$$= -\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{2}AD \times \frac{1}{2}AD$$
$$= -\frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{4}AD^2 \quad \text{or} \quad AB = AD$$
$$= 0.$$

ainsi $(AI) \perp (BF)$.

Ex4 :

$BC = 3$ $CG = 1$. $BG = \sqrt{BC^2 + CG^2} = \sqrt{10}$ d'après le théorème de Pythagore.

$EF = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $FD = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ et $ED = 1$

Ainsi :

$$\vec{BC} \cdot \vec{BG} = \frac{1}{2}\left(BC^2 + BG^2 - CG^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(3^2 + \sqrt{10}^2 - 1^2\right)$$
$$= 9$$

$$\vec{FE} \cdot \vec{FD} = \frac{1}{2}\left(FE^2 + FD^2 - ED^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}^2 + \sqrt{5}^2 - 1^2\right)$$
$$= 3$$

De plus : $\cos\alpha = \dfrac{\vec{BC} \cdot \vec{BG}}{BC \times BC} = \dfrac{9}{3 \times \sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

et $\cos\beta = \dfrac{\vec{FE} \cdot \vec{FD}}{FE \times FD} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

donc $\alpha = \beta$.