Fonctions sinus et cosinus

1. Parité

Méthode : On calcule *f(-x)* et on cherche s'il est égal à *f(x)* ou à *–f(x)*

Si *f(-x) = f(x)* la fonction est paire
Si *f(-x) = - f(x)* la fonction est impaire

Exercice 1 : Étudier la parité de chaque fonction sur son ensemble de définition.

$f(x) = cos(2x) + 2\,cos(x) \qquad I =]-\pi;\pi[$

$f(-x) = \cos(-2x) + 2\cos(-x)$ et la fonction cosinus est paire ainsi :

$f(-x) = \cos(2x) = 2\cos(x) = f(x)$ donc f est paire.

$g(x) = \left(1 + cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad I = \mathbb{R}$

$g(-x) = \left(1 + \cos\left(-\frac{x}{2}\right)\right)\left(\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right)$

la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ainsi :

$g(-x) = \left(1 + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)\left(-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -g(x)$ donc g est impaire.

$h(x) = sin^2(x)\,cos(2x) \quad I = \mathbb{R}$

$h(-x) = \sin^2(-x)\cos(-2x)$ et la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ainsi :

$h(-x) = (-\sin(x))^2\cos(2x) = \sin^2(x)\cos(2x) = h(x)$

donc h est paire.

2. Périodicité

Méthode : On calcule *f(x+T)* et on cherche s'il est égal à *f(x)*.
La fonction est alors périodique de période T.

Exercice 2 : Conjecturer à la calculatrice graphique et démontrer la périodicité des fonctions suivantes :

$f(x) = cos(2x) + 2\,cos(x) \qquad I =]-\pi;\pi[$

f semble 2π-périodique.

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos\big(2(x+2\pi)\big) + 2\cos(x+2\pi) \\ &= \cos(2x+4\pi) + 2\cos(x+2\pi) \end{aligned}$$

La fonction cosinus est 2π-périodique ainsi :

$$f(x+2\pi) = \cos(2x) + 2\cos(x) = f(x)$$

Donc f est périodique de période 2π.

$g(x) = \left(1 + cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad I = \mathbb{R}$

g semble 4π périodique.

$$\begin{aligned} g(x+4\pi) &= \left(1 + \cos\left(\frac{x+4\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}\right) \\ &= \left(1 + \cos\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right)\right)\sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) \end{aligned}$$

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques ainsi :

$$g(x+4\pi) = \left(1 + cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) sin\left(\frac{x}{2}\right) = g(x)$$

donc g est périodique de période 4π.

$h(x) = sin^2(x)\, cos(2x) \quad I = \mathbb{R}$

h semble π-périodique

$$h(x+\pi) = (\sin(x+\pi))^2 \cos\big(2(x+\pi)\big)$$

Or $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ et la fonction cosinus est périodique de période 2π ainsi :

$$h(x) = (-\sin(x))^2 \cos(2x+2\pi) = \sin^2(x)\cos(2x) = h(x)$$

h est périodique de période π.

<u>Exercice 3 :</u> f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2+cos(x)}$

1a. Conjecturer la parité et la période de f.

f semble paire et périodique de période 2π

1b. Pour tout nombre réel x, exprimer $f(-x)$ et $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

$$f(-x) = \frac{1}{2+\cos(-x)} = \frac{1}{2+\cos(x)} = f(x)$$

$$f(x+2\pi) = \frac{1}{2+\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{2+\cos(x)} = f(x)$$

Ces résultats confirment-ils les conjectures émises à la question 1a ?

$f(x-) = f(x)$ donc f est paire.

$f(x+2\pi) = f(x)$ donc f est périodique de période 2π.

2. Par quelles transformations obtient-on la courbe représentative de f sur [-3π ; 3π] dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, à partir du tracé de la courbe sur l'intervalle [0 ; π] ?

La fonction f étant paire, C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. On obtient le tracé le C_f sur $[-\pi; 0]$ par symétrie par rapport à (Oy) à partir du tracé de la courbe sur l'intervalle [0 ; π] .

La fonction f étant périodique de période 2π, par translation de C_f de $[-\pi\,;\pi]$ sur $[-3\pi\,;-\pi]$ et sur $[\pi\,;3\pi]$, on obtient la courbe représentative de f sur [-3π ; 3π].