

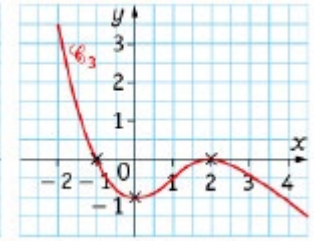
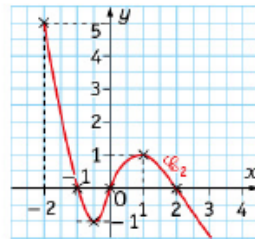
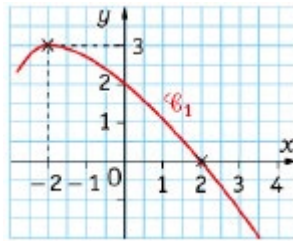
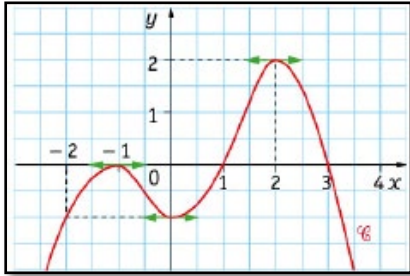


Fonctions dérivées - Exercices

Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe C représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

L'une des courbes C_1, C_2, C_3 ci-après représente graphiquement la fonction dérivée f' de f . Laquelle ? Justifier.



Dressons le tableau de variations de la fonction f pour déterminer le signe de f'

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	-
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Seule C_2 change 3 fois de signe en -1, 0 et 2.

C_2 est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de f .

Exercice 2

1. Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Soit a un réel de $\mathbb{R}^*$. Montrer que la fonction f est dérivable en a et que $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

Déterminons le taux de variations :

$$f(a+h) = \frac{1}{a+h} \text{ et } f(a) = \frac{1}{a}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{a}{a(a+h)} - \frac{a+h}{a(a+h)} \right)$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} \times \left(\frac{-h}{a(a+h)} \right)$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-1}{a^2 + ah}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{a^2 + ah} \right) = -\frac{1}{a^2}$$

Pour tout a appartenant à $\mathbb{R}^*$, f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

2. Compléter le tableau ci-dessous en utilisant les formules du cours.

On ne demande pas de justifier.

f est définie sur :	$\mathbb{R}$	$[0 ; +\infty[$	$]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[\frac{1}{5}; +\infty[$
$f(x)$	$5x^4 - 3x^2 + x - 4$	$(x^2 + 2)\sqrt{x}$	$\frac{1}{-2x + 3}$	$-3(7 - 4x)^2$	$\sqrt{5x - 1}$
f est dérivable sur :	$\mathbb{R}$	$]0 ; +\infty[$	$]-\infty; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$[\frac{1}{5}; +\infty[$
$f'(x)$	$20x^3 - 6x + 1$	$2x\sqrt{x} + \frac{(x^2 + 2)\sqrt{x}}{2x} = \frac{5}{2}x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}$	$\frac{2}{(-2x + 3)^2}$	$24(7 - 4x)$	$\frac{5}{2\sqrt{5x - 1}}$

Exercice 3

h est une fonction définie sur l'intervalle $[-5; 3]$.

Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre.

Dans chaque cas, entourer la bonne réponse.

a) Un maximum local de h sur $[-5; 3]$ est :

(1) -2

(2) -1

(3) 2

b) Un minimum local de h sur $[-5; 3]$ est atteint en :

(1) -2

(2) -4

(3) 1

c) Le minimum de h sur $[-5; 3]$ est :

(1) 3

(2) -2

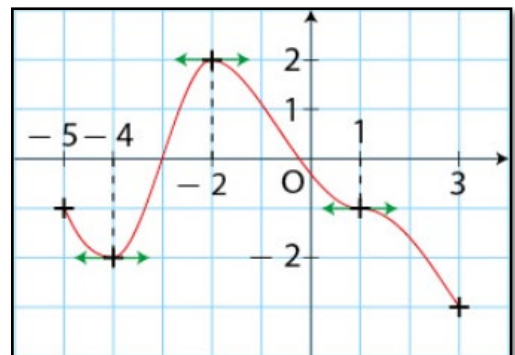
(3) -3

d) Le maximum de h sur $[-5; 3]$ est :

(1) 2

(2) -2

(3) -1



Exercice 4

On admet que toutes les fonctions suivantes sont dérivables. Calculer leurs dérivées.

a) $f(x) = (-5x + 1)^4$ avec $x \in \mathbb{R}$

f est de la forme $g(ax + b)$. Sa dérivée est $a \times g'(ax + b)$

$$f'(x) = -5 \times 4 \times (-5x + 1)^{4-1} = -20(-5x + 1)^3$$



b) $g(x) = (4 + 3x)\sqrt{x}$ avec $x \geq 0$

g est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 4 + 3x$ et $v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$g'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (4 + 3x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{(4 + 3x)(\sqrt{x})}{2x}$$

$$g'(x) = \frac{6x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + 3x\sqrt{x}}{2x}$$

$$g'(x) = \frac{(9x + 4)\sqrt{x}}{2x}$$

c) $h(x) = \frac{-x^2+3}{x+2}$ avec $x \neq -2$

h est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = -x^2 + 3$ et $v(x) = x + 2$

$u'(x) = -2x$ et $v'(x) = 1$

$$h'(x) = \frac{-2x(x + 2) - 1 \times (-x^2 + 3)}{(x + 2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + x^2 - 3}{(x + 2)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x + 2)^2}$$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée correspondante (simplifiée au maximum l'expression trouvée...)

1. $f(x) = 4x^6 - \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x - 3$ $D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 24x^5 - 2x^3 - 2x + 1$



$$2. f(x) = 4x^7 + \sqrt{x} + \frac{5}{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 28x^6 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{56x^8 + x\sqrt{x} - 10\sqrt{x}}{2x^2}$$

$$3. f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x - 2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x - 2) - 1(2x^2 - 5)}{(x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 5}{(x - 2)^2}$$

$$4. f(x) = (2x + 2)\sqrt{x}$$

$$D_f = \mathbb{R}_+$$

$$f'(x) = 2 \times \sqrt{x} + (2x + 2) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x + 2) \times \frac{\sqrt{x}}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{4x\sqrt{x} + (2x + 2)\sqrt{x}}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{(6x + 2)\sqrt{x}}{2x}$$

$$f'(x) = \frac{(3x + 1)\sqrt{x}}{x}$$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x + 5}$.

1. Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f .

$$2x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2}$$

f est définie sur $[-\frac{5}{2}; +\infty[$ et dérivable sur $] -\frac{5}{2}; +\infty[$.



2. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f .

f est de la forme $g(ax + b)$

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+5}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

Exercice 7 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{-x^2+2x+1}{x-1}$.

La courbe C représentative de la fonction g ainsi que sa tangente T au point A d'abscisse 2 sont tracées dans le repère ci-dessous :

1. Déterminer $g'(2)$ par lecture graphique.

$g'(2)$ est la pente de la tangente T

$$g'(2) = -3$$

2. a. Montrer que pour tout x de I , la fonction dérivée g' de g s'écrit :

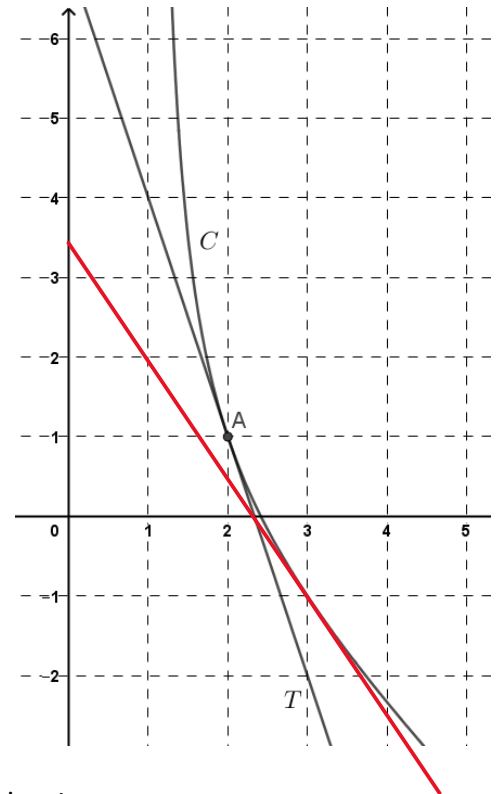
$$g'(x) = \frac{-x^2+2x-3}{(x-1)^2}$$

g est de la forme $\frac{u}{v}$ dérivable sur I .

$$g'(x) = \frac{(-2x+2)(x-1) - 1 \times (-x^2+2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x^2+2x+2x-2-x^2+2x+1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-x^2+2x-3}{(x-1)^2}$$



b. En déduire $g'(2)$ et vérifier la cohérence avec le résultat de la question 1.

$$g'(2) = \frac{-2^2+2 \times 2-3}{(2-1)^2}$$

$$g'(2) = \frac{(-4+4-3)}{1}$$

$$g'(2) = -3$$

On retrouve la valeur de $g'(2)$ déterminée à la première question.



3. Tracer la tangente à C au point d'abscisse 3.

Calculons $g'(3)$ le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 3 pour tracer cette tangente (en rouge sur le graphique)

$$g'(3) = \frac{-3^2 + 2 \times 3 - 3}{(3 - 1)^2} = -\frac{3}{2}$$

4. a. Vérifier que pour tout réel x de I , $g(x) = -x + 1 + \frac{2}{x-1}$

$$-x + 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{(-x + 1)(x - 1) + 2}{x - 1}$$

$$-x + 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{-x^2 + x + x - 1 + 2}{x - 1}$$

$$-x + 1 + \frac{2}{x-1} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

$$-x + 1 + \frac{2}{x-1} = g(x)$$

b. Calculer $g'(x)$ en utilisant cette formule. Vérifier la cohérence avec la réponse de la question 2.a.

$g(x)$ est de la forme $ax + b + \frac{1}{u(x)}$

$$g'(x) = a - \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$$

$$g'(x) = -1 - 2 \times \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$g'(x) = -1 - \frac{2}{(x-1)^2}$$



Mettons au même dénominateur cette expression :

$$-1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}$$

$$-1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{-(x^2 - 2x + 1) - 2}{(x-1)^2}$$

$$-1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1 - 2}{(x-1)^2}$$

$$-1 - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 3}{(x-1)^2}$$

On retrouve l'expression de $g'(x)$ obtenue à la question 2a.

5. a. Montrer que T a pour équation réduite $y = -3x + 7$.

$$T: y = g'(2)(x - 2) + g(2)$$

On a $g'(2) = -3$ d'après la question 1

$$\text{et } g(2) = \frac{-2^2 + 2 \times 2 + 1}{2 - 1} = 1$$

$$T: y = -3(x - 2) + 1$$

$$T: y = -3x + 6 + 1$$

$$T: y = -3x + 7$$

L'équation réduite de la tangente T est $y = -3x + 7$.

b. Montrer que pour tout réel x , $g(x) - (-3x + 7) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 1}$

$$g(x) - (-3x + 7) = -x + 1 + \frac{2}{x - 1} - (-3x + 7)$$

$$g(x) - (-3x + 7) = -x + 1 + \frac{2}{x - 1} + 3x - 7$$

$$g(x) - (-3x + 7) = 2x - 6 + \frac{2}{x - 1}$$

$$g(x) - (-3x + 7) = \frac{(2x - 6)(x - 1) + 2}{x - 1}$$

$$g(x) - (-3x + 7) = \frac{2x^2 - 2x - 6x + 6 + 2}{x - 1}$$

$$g(x) - (-3x + 7) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x - 1}$$



c. Etudier le signe de $g(x) - (-3x + 7)$.

$$g(x) - (-3x + 7) = \frac{2(x^2 - 4x + 4)}{x - 1}$$

$$g(x) - (-3x + 7) = \frac{2(x - 2)^2}{x - 1}$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	1	2	$+\infty$
$2(x - 2)^2$	+	0	+
$x - 1$	+		+
$g(x) - (-3x + 7)$	+	0	+

d. En déduire que C est au dessus de T sur I .

D'après la question précédente, $g(x) - (-3x + 7) \geq 0$ sur I .

Donc $g(x) \geq -3x + 7$ sur I . Or, T a pour équation réduite $y = -3x + 7$.

On en déduit que C est au dessus de T sur I .

Exercice 8 :

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe aux points A, B et C (en pointillés).

1. Conjecturer, par lecture graphique, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

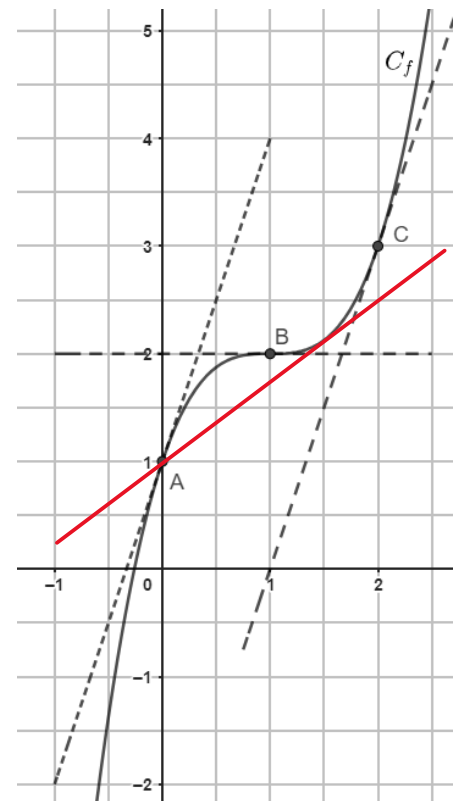
$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3$$

2. Conjecturer, par lecture graphique, $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

$$f'(0) = 3, \quad f'(1) = 0, \quad f'(2) = 3$$

3. Que peut-on conjecturer pour les tangentes à la courbe C_f aux points A et C ?

Les tangentes à C_f aux points A et C semblent parallèles.





4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$

5. Les tangentes aux points A et C sont-elles parallèles ? Justifier.

$$f'(0) = 3 \times 0^2 - 6 \times 0 + 3 = 3$$

$$f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 3 = 12 - 12 + 3 = 3$$

$f'(0) = f'(3)$ donc les tangentes à C_f en A et en C sont parallèles.

6. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1,5 et la tracer ci-dessus.

Déterminons l'équation de cette tangente :

$$y = f'(1,5)(x - 1,5) + f(1,5)$$

avec

$$f'(1,5) = 3 \times 1,5^2 - 6 \times 1,5 + 3 = 0,75$$

et

$$f(1,5) = 1,5^3 - 3 \times 1,5^2 + 3 \times 1,5 + 1 = 2,125$$

Ainsi $y = 0,75(x - 1,5) + 2,125$

$$y = 0,75x - 1,125 + 2,125$$

$$y = 0,75x + 1$$

L'équation réduite de la tangente à C_f au point d'abscisse 1,5 est $y = 0,75x + 1$

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+x+9}{x+1}$.

Etudier les variations de la fonction f . Justifier la réponse de façon précise.

En déduire les extremums de la fonction.

f est définie et dérivable sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$ comme fonction rationnelle.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - 1 \times (x^2+x+9)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^2 + 2x + x + 1 - x^2 - x - 9)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2}$$

Etudions le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty; -1[\cup] -1; +\infty[$:



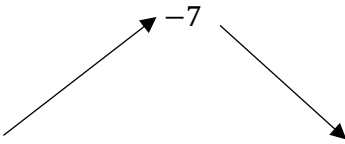
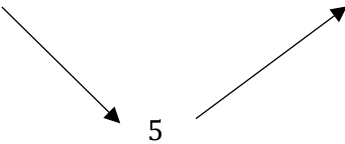
$(x+1)^2 > 0$ sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré

$$x^2 + 2x - 8$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 36$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{36}}{2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{36}}{2} = 2$$

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$	
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+
variations de f						

$$f(-4) = \frac{(-4)^2 - 4 + 9}{-4 + 1} = -7 \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{2^2 + 2 + 9}{2 + 1} = 5$$

D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction f admet un maximum local de -7 en $x = -4$ et un minimum local de 5 en $x = 2$.

Exercice 10 :

On modélise la concentration dans le sang, en microgramme par litre ($\mu\text{g. L}^{-1}$), d'un anesthésiant t heures après son administration par la fonction $f: t \mapsto \frac{20}{0,005t^2 + 0,1t + 1}$ où $t \in [0; 36]$.

1. Calculer $f'(t)$ où $t \in [0; 36]$.

Pour tout $t \in [0; 36]$:

$$f'(t) = -20 \times \frac{2 \times 0,005t + 0,1}{(0,005t^2 + 0,1t + 1)^2}$$

$$f'(t) = \frac{-0,2t - 2}{(0,005t^2 + 0,1t + 1)^2}$$

2. En déduire le sens de variation de f et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour tout $t \in [0; 36]$, $-0,2t - 2 < 0$ et $(0,005t^2 + 0,1t + 1)^2 > 0$ donc $f'(t) < 0$.

Ainsi f est décroissante sur $[0; 36]$



On peut résumer cela dans un tableau de variations :

t	0	36
$-0,2t - 2$	—	
$(0,005t^2 + 0,1t + 1)^2$	+	
signe de $f'(t)$	—	
variations de f	20 $\frac{500}{277}$	

3. On estime qu'un patient auquel on a administré cet anesthésiant peut rentrer chez lui quand la concentration du médicament est inférieure à 10% de sa concentration au moment de son administration. Après combien d'heures ce patient pourra-t-il rentrer chez lui ?

Calculons la concentration limite :

$$20 \times \frac{10}{100} = 2$$

Un patient auquel on a administré cet anesthésiant peut rentrer chez lui quand la concentration du médicament est inférieure à $2 \mu\text{g. L}^{-1}$.

On résout $f(t) < 2$ (a)

$$(a) \Leftrightarrow \frac{20}{0,005t^2 + 0,1t + 1} < 2$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{20}{0,005t^2 + 0,1t + 1} - 2 < 0$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{20 - 2(0,005t^2 + 0,1t + 1)}{0,005t^2 + 0,1t + 1} < 0$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{20 - 0,01t^2 - 0,2t - 2}{0,005t^2 + 0,1t + 1} < 0$$

$$(a) \Leftrightarrow \frac{-0,01t^2 - 0,2t + 18}{0,005t^2 + 0,1t + 1} < 0$$

Etudions le signe des deux polynômes du second degré :

- Signe de $-0,01t^2 - 0,2t + 18$

$$\Delta = (-0,2)^2 - 4 \times (-0,01) \times 18 = 0,76$$

Ce polynôme admet deux racines t_1 et t_2 :

$$t_1 = \frac{0,2 - \sqrt{0,76}}{2 \times (-0,01)} = -10 + 10\sqrt{19} \approx 33,6$$



$$t_2 = \frac{0,2 + \sqrt{0,76}}{2 \times (-0,01)} = -10 - 10\sqrt{19} \approx -53,6$$

$$t_2 \notin [0; 36]$$

- Signe de $0,005t^2 + 0,1t + 1$

$$\Delta = 0,1^2 - 4 \times 0,005 \times 1 = -0,01$$

Ce polynôme n'a pas de racines et est du signe de son coefficient dominant $a = 0,005$ donc positif sur $[0; 36]$

- Signe de $\frac{-0,01t^2 - 0,2t + 18}{0,005t^2 + 0,1t + 1}$

t	0	t_1	36
$-0,01t^2 - 0,2t + 18$	+	0	-
$0,005t^2 + 0,1t + 1$	+		+
$\frac{-0,01t^2 - 0,2t + 18}{0,005t^2 + 0,1t + 1}$	+	0	-

Ainsi $f(t) < 2$ pour $t \in]t_1; 36]$

Le patient peut rentrer chez lui au bout de 34 heures.

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3|x - 2|$.

1. Exprimer $f(x)$ sans les symboles de la valeur absolue.

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} f(x) = 3(-x + 2) \text{ pour } x \leq 2 \\ f(x) = 3(x - 2) \text{ pour } x \geq 2 \end{cases}$$

2. a. Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 2$. On distinguera 2 cas.

Cas 1 : Pour $x \leq 2, f'(x) = 3 \times (-1) = -3$

Cas 2 : Pour $x \geq 2, f'(x) = 3 \times 1 = 3$

- b. Justifier que f n'est pas dérivable en 2.

Il existe deux valeurs différentes de $f'(2)$: -3 et 3 . Or une fonction est dite dérivable s'il existe un unique nombre réel appelé nombre dérivé. Donc f n'est pas dérivable en 2.

Exercice 12 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x + 5)(3x^2 - 2x + 1)$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

f est le produit de deux fonctions polynômes dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.



2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2(3x^2 - 2x + 1) + (-2x + 5)(6x - 2)$$

$$f'(x) = -6x^2 + 4x - 2 - 12x^2 + 4x + 30x - 10$$

$$f'(x) = -18x^2 + 38x - 12$$

3) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

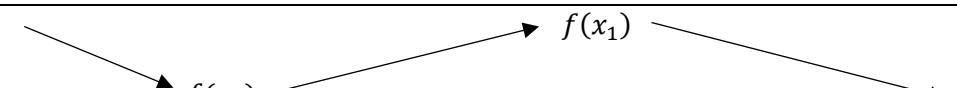
Etudions le signe de $-18x^2 + 38x - 12$

$$\Delta = 38^2 - 4 \times (-18) \times (-12) = 580$$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines réelles.

$$x_1 = \frac{-38 - \sqrt{580}}{2 \times (-18)} = \frac{19 + \sqrt{145}}{18} \approx 1,7$$

$$x_2 = \frac{-38 + \sqrt{580}}{2 \times (-18)} = \frac{19 - \sqrt{145}}{18} \approx 0,4$$

x	$-\infty$	$\frac{19-\sqrt{145}}{18}$	$\frac{19+\sqrt{145}}{18}$	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
variations de f					

A la calculatrice, on a $f(x_1) = \frac{3133 + 145\sqrt{145}}{486} \approx 10$ et $f(x_2) = \frac{3133 - 145\sqrt{145}}{486} \approx 2,9$

Exercice 13 :

Pour chacune de ces questions, recopie la bonne réponse. On ne demande pas de justifier.

1) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ et $v(x) = x - 2$.

Alors pour tout réel x , $u \circ v(x) = \dots$

a) $(x - 2)^2$

b) $x^2 - 2$

c) $x^2(x - 2)$

d) $x^2 + (x - 2)$

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

a) $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}$

b) $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$

d) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$



3) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(3x - 1)^4$.

a) $g'(x) = 8(3x - 1)^3$

b) $g'(x) = 4(3x - 1)^3$

c) $g'(x) = 24(3x - 1)^3$

d) $g'(x) = 12(3x - 1)^3$

4) h est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = -\frac{2}{x^3}$

a) $h'(x) = \frac{2}{3x^2}$

b) $h'(x) = -\frac{6}{x^4}$

c) $h'(x) = \frac{6}{x^2}$

d) $h'(x) = \frac{6}{x^4}$

5) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dans un repère orthonormé, on donne sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

La droite (AB) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A .

On définit la fonction g sur $] -1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

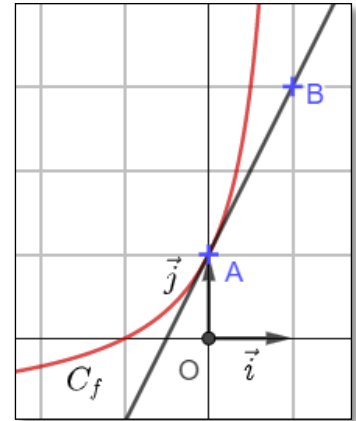
A l'aide de lectures graphiques, on peut affirmer que :

a) $g'(0) = \frac{1}{2}$

b) $g'(0) = 2$

c) $g'(0) = -\frac{1}{2}$

d) $g'(0) = -2$



Exercice 14 :

On considère la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = (x - 3)\sqrt{x}$.

On note $\mathcal{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Prouver que pour tout réel x strictement positif $h'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

Pour tout $x > 0$ on a $h'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x - 3) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$h'(x) = \sqrt{x} \times \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x - 3}{2\sqrt{x}}$$



$$h'(x) = \frac{2x + x - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{3x - 3}{2\sqrt{x}}$$

$$h'(x) = \frac{3(x - 1)}{2\sqrt{x}}$$

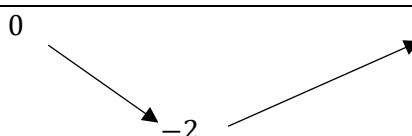
2) La fonction h admet-elle un (des) extremum(s) local (aux) ?

Si oui, préciser sa (leurs) nature(s) et en quelle(s) valeur(s) il(s) est (sont) atteint(s).

Etudions le signe de $h'(x)$ et les variations de h .

Sur $]0; +\infty[$, $\sqrt{x} > 0$ donc $h'(x)$ est du signe de $x - 1$

$$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$$

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
h	0		

D'après le tableau ci-dessus, la fonction h admet un minimum local de -2 en $x = 1$.

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C_h au point d'abscisse 4.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est donnée par :

$$y = h'(4)(x - 4) + h(4)$$

$$h(4) = (4 - 3) \times \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad h'(4) = \frac{3 \times (4 - 1)}{2\sqrt{4}} = \frac{9}{4}$$

$$y = \frac{9}{4}(x - 4) + 2$$

$$y = \frac{9}{4}x - 7$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 4 est $y = \frac{9}{4}x - 7$.

**Exercice 15 :****Partie A :**

Soit f la fonction définie sur $] - \infty; 3[\cup]3; +\infty[$ par: $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$

f est définie et dérivable sur $] - \infty; 3[\cup]3; +\infty[$ comme quotient de deux polynômes définis et dérivables sur $] - \infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{2x \times (x-3) - 1 \times (x^2)}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x - x^2}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$$

2) Construire, en justifiant, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Etudions le signe de chaque facteur de $f'(x)$

x	$-\infty$	0	3	6	$+\infty$		
x		$-$	0	$+$	$+$		
$x - 6$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x - 3)^2$		$+$	$+$	0	$+$	$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
Variations de f		↗ ↘			↘ ↗		



$$f(0) = \frac{0^2}{0-3} = 0$$

$$f(6) = \frac{6^2}{6-3} = 12$$

Partie B :

$OABC$ est un rectangle tel que $OA = 2$ et $OC = 3$.

M est un point de la demi-droite $[OC)$ ne contenant pas O .

Les droites (BM) et (OA) se coupent en D .

On pose $OM = x$ avec $x \geq 3$.

- 1) Montrer que $OD = \frac{2x}{x-3}$.

Les droites (DB) et (OC) se coupent en M .

Les droites (OD) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OD}{BC} = \frac{OM}{MC} = \frac{DM}{BM}$$

$$\frac{OD}{2} = \frac{x}{x-3}$$

$$OD = \frac{2x}{x-3}$$

- 2) En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle ODM est minimale.

Soit $A(x)$ l'aire du triangle ODM .

$$A(x) = \frac{OD \times OM}{2}$$

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x-3} \times x$$

$$A(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

On remarque que $A(x) = f(x)$.

D'après le tableau de variations de f , pour $x > 3$, la fonction est minimale en $x = 6$.

L'aire du triangle ODM est minimale quand $x = 6$ et elle vaut 12 unités d'aire.

