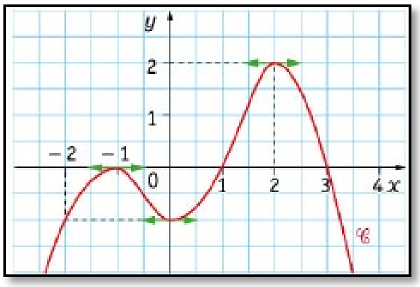
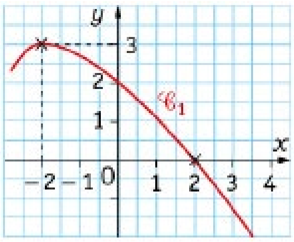
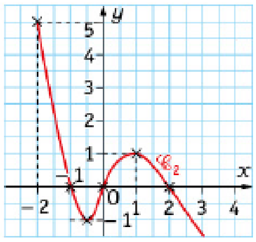
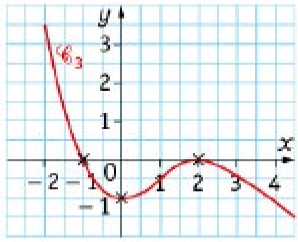
Fonctions dérivées - Exercices

Exercice 1

On donne ci-dessous la courbe C représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.
L'une des courbes C_1, C_2, C_3 ci-après représente graphiquement la fonction dérivée f' de f. Laquelle ? Justifier.





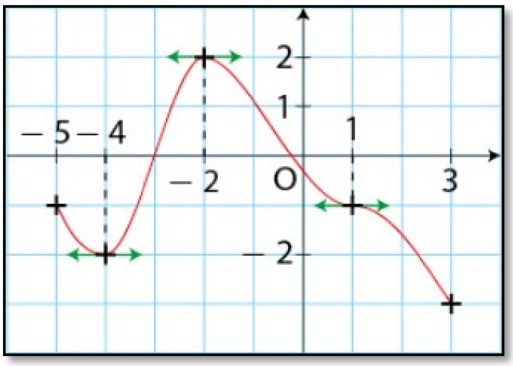
Exercice 2

1. Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
   Soit a un réel de $\mathbb{R}^*$. Montrer que la fonction f est dérivable en a et que $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
2. Compléter le tableau ci-dessous en utilisant les formules du cours.
   On ne demande pas de justifier.

f est définie sur :	$\mathbb{R}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$	$\mathbb{R}$	$\left[\frac{1}{5}; +\infty\right[$
$f(x)$	$5x^4 - 3x^2 + x - 4$	$(x^2+2)\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{-2x+3}$	$-3(7-4x)^2$	$\sqrt{5x-1}$
f est dérivable sur :					
$f'(x)$					

Exercice 3

h est une fonction définie sur l'intervalle $[-5; 3]$.
Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-contre.
Dans chaque cas, entourer la bonne réponse.



a) Un maximum local de h sur [-5 ; 3] est :
(1) -2 **(2)** -1 **(3)** 2

b) Un minimum local de h sur [-5 ; 3] est atteint en :
(1) -2 **(2)** -4 **(3)** 1

c) Le minimum de h sur [-5 ;3] est :
(1) 3 **(2)** -2 **(3)** -3

d) Le maximum de h sur [-5 ;3] est :
(1) 2 **(2)** -2 **(3)** -1

Exercice 4

On admet que toutes les fonctions suivantes sont dérivables. Calculer leurs dérivées.

a) $f(x) = (-5x+1)^4$ avec $x \in \mathbb{R}$

b) $g(x) = (4+3x)\sqrt{x}$ avec $x \geq 0$

c) $h(x) = \frac{-x^2+3}{x+2}$ avec $x \neq -2$

Exercice 5

Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée correspondante (simplifiée au maximum l'expression trouvée...)

1. $f(x) = 4x^6 - \frac{1}{2}x^4 - x^2 + x - 3$ $\qquad D_f = \mathbb{R}$

2. $f(x) = 4x^7 + \sqrt{x} + \frac{5}{x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}_+^*$

3. $f(x) = \frac{2x^2-5}{x-2}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

4. $f(x) = (2x+2)\sqrt{x}$ $\qquad D_f = \mathbb{R}_+$

Exercice 6 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

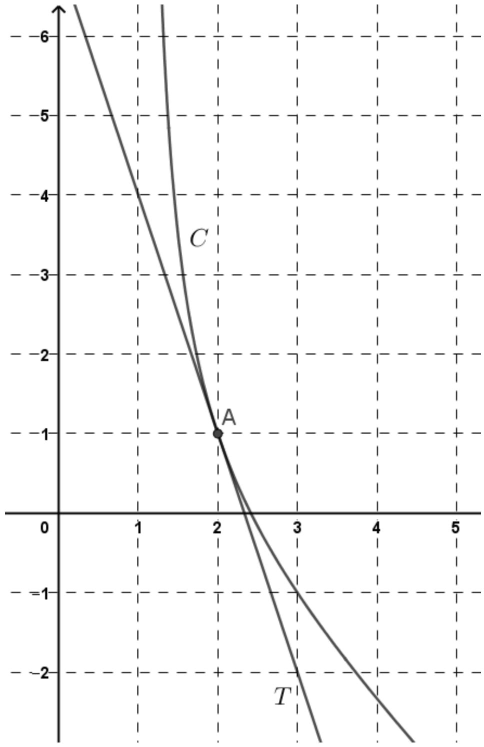
1. Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

2. Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.

Exercice 7 :

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{-x^2+2x+1}{x-1}$.

La courbe C représentative de la fonction g ainsi que sa tangente T au point A d'abscisse 2 sont tracées dans le repère ci-dessous :



1. Déterminer $g'(2)$ par lecture graphique.

2. a. Montrer que pour tout x de I, la fonction dérivée g' de g s'écrit : $g'(x) = \frac{-x^2+2x-3}{(x-1)^2}$

b. En déduire $g'(2)$ et vérifier la cohérence avec le résultat de la question 1.

3. Tracer la tangente à C au point d'abscisse 3.

4. a. Vérifier que pour tout réel x de I, $g(x) = -x + 1 + \frac{2}{x-1}$

b. Calculer $g'(x)$ en utilisant cette formule. Vérifier la cohérence avec la réponse de la question 2.a.

5. a. Montrer que T a pour équation réduite $y = -3x + 7$.

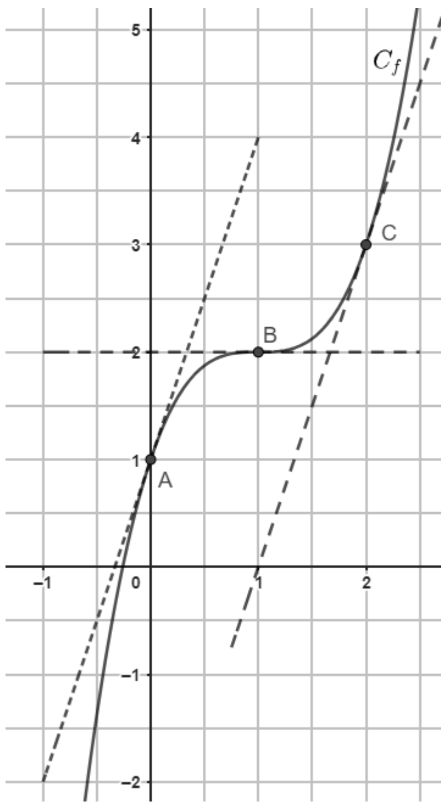
b. Montrer que pour tout réel x, $g(x) - (-3x + 7) = \frac{2x^2-8x+8}{x-1}$

c. Etudier le signe de $g(x) - (-3x + 7)$.

d. En déduire que C est au dessus de T sur I.

Exercice 8 :

On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe aux points A, B et C (en pointillés).



1. Conjecturer, par lecture graphique, $f(0), f(1)$ et $f(2)$.

2. Conjecturer, par lecture graphique, $f'(0), f'(1)$ et $f'(2)$.

3. Que peut-on conjecturer pour les tangentes à la courbe C_f aux points A et C ?

4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Déterminer l'expression de $f'(x)$.

5. Les tangentes aux points A et C sont-elles parallèles ? Justifier.

6. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 1,5 et la tracer ci-dessus.

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x^2+x+9}{x+1}$.
Etudier les variations de la fonction f. Justifier la réponse de façon précise.
En déduire les extremums de la fonction.

Exercice 10 :

On modélise la concentration dans le sang, en microgramme par litre (µg. L-[1]), d'un anesthésiant t heures après son administration par la fonction $f: t \longmapsto \frac{20}{0{,}005t^2+0{,}1t+1}$ où $t \in [0;36]$.

1. Calculer $f'(t)$ où $t \in [0;36]$.
2. En déduire le sens de variation de f et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On estime qu'un patient auquel on a administré cet anesthésiant peut rentrer chez lui quand la concentration du médicament est inférieure à 10% de sa concentration au moment de son administration. Après combien d'heures ce patient pourra-t-il rentrer chez lui ?

Exercice 11 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3|x-2|$.

1. Exprimer $f(x)$ sans les symboles de la valeur absolue.

2. **a.** Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 2$. On distinguera 2 cas.
b. Justifier que f n'est pas dérivable en 2.

Exercice 12 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-2x+5)(3x^2 - 2x + 1)$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 :

Pour chacune de ces questions, recopie la bonne réponse. On ne demande pas de justifier.

1) Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2$ est $v(x) = x - 2$.
Alors pour tout réel $x, u \circ v(x) = \cdots$

a) $(x-2)^2$ b) $x^2 - 2$ c) $x^2(x-2)$ d) $x^2 + (x-2)$

2) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$.

a) $f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2}$ b) $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$

c) $f'(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ d) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$

3) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2(3x-1)^4$.

a) $g'(x) = 8(3x-1)^3$ b) $g'(x) = 4(3x-1)^3$

c) $g'(x) = 24(x-1)^3$ d) $g'(x) = 12(3x-1)^3$

4) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $h(x) = -\frac{2}{x^3}$

a) $h'(x) = \frac{2}{3x^2}$ b) $h'(x) = -\frac{6}{x^4}$

c) $h'(x) = \frac{6}{x^2}$ d) $h'(x) = \frac{6}{x^4}$

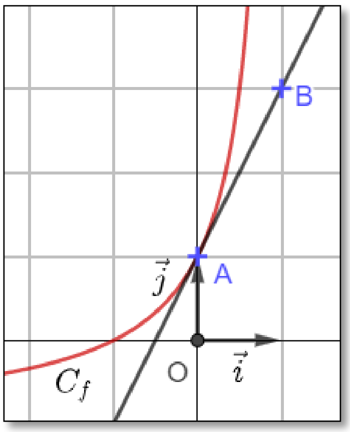
5) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Dans un repère orthonormé, on donne sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
La droite (AB) est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A.
On définit la fonction g sur $]-1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{f(x)}$$

A l'aide de lectures graphiques, on peut affirmer que :

a) $g'(0) = \frac{1}{2}$ b) $g'(0) = 2$

c) $g'(0) = -\frac{1}{2}$ d) $g'(0) = -2$



Exercice 14 :

On considère la fonction h définie sur $[0;\ +\infty[$ par $h(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

On note C_h sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Prouver que pour tout réel x strictement positif $h'(x) = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$.

2) La fonction h admet-elle un (des) extremum(s) local (aux) ?

Si oui, préciser sa (leurs) nature(s) et en quelle(s) valeur(s) il(s) est (sont) atteint(s).

3) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe C_h au point d'abscisse 4.

Exercice 15 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;\ 3[\cup]3;\ +\infty[$ par: $f(x) = \frac{x^2}{x-3}$.

1) Démontrer que, pour tout réel $x \neq 3$, $f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}$

2) Construire, en justifiant, le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.

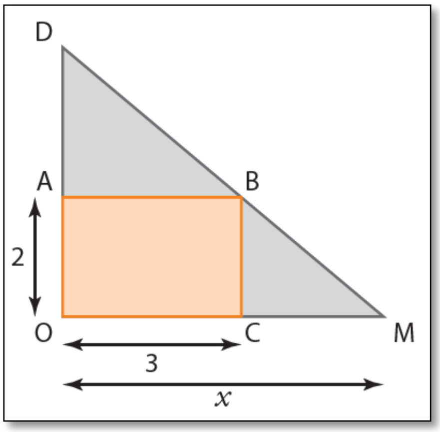
Partie B :

$OABC$ est un rectangle tel que $OA = 2$ et $OC = 3$.

M est un point de la demi-droite $[OC)$ ne contenant pas O.

Les droites (BM) et (OA) se coupent en D.

On pose $OM = x$ avec $x \geq 3$.



1) Montrer que $OD = \frac{2x}{x-3}$.
2) En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle ODM est minimale.