

SUITES NUMÉRIQUES

— PREMIÈRE SPÉ MATHS —

1. MODES DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE

Une suite (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$: à chaque entier n elle associe le réel u_n , appelé **terme de rang n** .

Forme explicite

$$u_n = f(n)$$

On calcule **directement** n'importe quel terme. Ex. : $u_n = 3n^2 - 1$ donne $u_{10} = 299$.

Relation de récurrence

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Il faut calculer **tous** les termes précédents. Ex. : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

Autres modes

Par un **motif géométrique**, un **tableau de valeurs** ou un **algorithme**.

Attention : le rang initial n'est pas toujours 0 (certaines suites démarrent à $n = 1$).

2. SENS DE VARIATION

Définition

(u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .

(u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n .

Une suite ni croissante ni décroissante est dite **non monotone**.

Méthode 1 — la différence

étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$

Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n , la suite est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n , la suite est décroissante.
C'est la méthode à privilégier.

Méthode 2 — le quotient

si $u_n > 0$, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ pour tout n , la suite est croissante.

Méthode 3 : si $u_n = f(n)$, la suite a le même sens de variation que f sur $[0; +\infty[$.

3. SUITES ARITHMÉTIQUES

Définition

On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même réel r , appelé **raison**.

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{n+1} - u_n = r$$

Terme général

$$u_n = u_0 + nr \quad u_n = u_p + (n - p)r$$

Sens de variation

$r > 0$: croissante $r < 0$: décroissante $r = 0$: constante.

Représentation graphique : les points $(n; u_n)$ sont **alignés** (croissance linéaire).

4. SUITES GÉOMÉTRIQUES

Définition

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même réel $q \neq 0$, appelé **raison**.

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Terme général

$$u_n = u_0 \times q^n \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Sens de variation (avec $u_0 > 0$ et $q > 0$)

$q > 1$: croissante $0 < q < 1$: décroissante $q = 1$: constante.

Croissance **exponentielle** : une hausse de $t\%$ par période correspond à $q = 1 + \frac{t}{100}$.

5. SOMMES DE TERMES

Sommes de référence

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

valable pour $q \neq 1$.

Suite arithmétique

$$S = \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$$

$$u_0 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Suite géométrique

$$S = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$$

$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Piège classique : de u_0 à u_n il y a $n + 1$ termes, et de u_p à u_n il y en a $n - p + 1$. Toujours **compter les termes** avant d'appliquer la formule.

À RETENIR

Explicite : calcul direct. Récurrence : de proche en proche.

Arithmétique : points alignés.
Géométrie : croissance exponentielle.

Variations : signe de $u_{n+1} - u_n$ dans la plupart des cas.

Compter les termes avant toute somme.