

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

— PREMIÈRE SPÉ MATHS —

1. PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition

A et B étant deux événements avec $P(A) \neq 0$, la probabilité de B **sachant** A est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

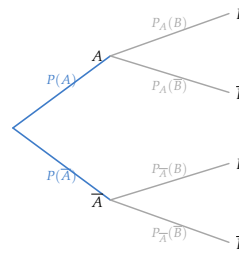
$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

Rappels utiles

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. ARBRE PONDÉRÉ



1. La somme des probabilités des branches issues d'un **même nœud** vaut 1.

2. La probabilité d'un **chemin** est le **produit** des probabilités des branches qui le composent.

3. La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

3. FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Partition de l'univers

Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers s'ils sont deux à deux incompatibles, de probabilités non nulles, et si leur réunion est l'univers tout entier.

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Cas le plus fréquent : la partition $(A; \overline{A})$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

$$P(B) = P(A) P_A(B) + P(\overline{A}) P_{\overline{A}}(B)$$

4. INDÉPENDANCE

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) \neq 0$, cela équivaut à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi, ainsi que A et $\overline{B}$.

Ne pas confondre : **incompatibles** signifie $A \cap B = \emptyset$ donc $P(A \cap B) = 0$, ce qui est en général **différent** de l'indépendance.

5. VARIABLE ALÉATOIRE ET LOI DE PROBABILITÉ

Définition

Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience. Donner sa **loi de probabilité**, c'est donner toutes les valeurs x_i prises par X et les probabilités $P(X = x_i)$ associées.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$: la somme des probabilités vaut toujours 1.

Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

Valeur moyenne obtenue si l'on répète un très grand nombre de fois l'expérience.

Variance et écart-type

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - (E(X))^2$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

L'écart-type mesure la **dispersion** des valeurs autour de l'espérance.

6. TRANSFORMATION AFFINE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

Espérance

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

L'espérance est **linéaire** : elle suit la transformation.

Variance

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Ajouter b décale les valeurs mais ne change pas la **dispersion**.

Écart-type

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

La valeur absolue est indispensable : un écart-type est toujours positif.

Interprétation d'un jeu : avec X le gain algébrique, le jeu est **équitable** si $E(X) = 0$, **favorable** si $E(X) > 0$, **défavorable** si $E(X) < 0$.

À RETENIR

🕒 $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$: on divise par la condition.

🌳 Arbre : produit le long d'un chemin, somme des chemins.

☀️ Indépendance $\neq$ incompatibilité.

✅ $E(aX + b) = aE(X) + b$ mais $V(aX + b) = a^2 V(X)$.