

LA FONCTION EXPONENTIELLE

— PREMIÈRE SPÉ MATHS —

1. DÉFINITION

Théorème et définition

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Cette fonction est la **fonction exponentielle**, notée $\exp$.

$$\exp(x) = e^x$$

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e \approx 2,718$$

Seule fonction non nulle égale à sa propre dérivée.

2. PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

Pour tous réels a et b et tout entier n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$(e^a)^n = e^{na}$$

À retenir : l'exponentielle **transforme les sommes en produits**.
Ce sont les règles de calcul des puissances, appliquées aux exposants.

3. DÉRIVÉES

$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^{kx})' = k e^{kx} \quad (e^{ax+b})' = a e^{ax+b}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

Exemple

$f(x) = (2x+1)e^x$: produit uv avec $u = 2x+1$ et $v = e^x$.

$$f'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x = (2x+3)e^x.$$

Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x+3$.

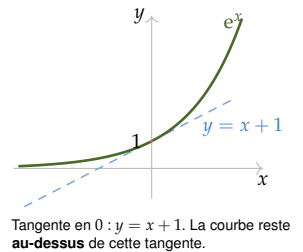
4. SIGNE, VARIATIONS ET COURBE

$$e^x > 0 \text{ pour tout réel } x$$

L'exponentielle ne s'annule jamais : très utile pour étudier le signe d'un produit.

Comme $(e^x)' = e^x > 0$, la fonction est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$		+
e^x	0	$+\infty$



Tangente en 0 : $y = x + 1$. La courbe reste **au-dessus** de cette tangente.

5. ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

La stricte croissance de l'exponentielle donne, pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b$$

$$e^a < e^b \iff a < b \quad e^a \leq e^b \iff a \leq b$$

Exemple

$$e^{3x-1} = e^{x+5} \iff 3x-1 = x+5$$

$$\iff 2x = 6 \iff x = 3$$

$$e^{2x} \leq e^{x+4} \iff 2x \leq x+4 \iff x \leq 4$$

L'équation $e^x = k$ n'a de solution que si $k > 0$.

6. LA FONCTION $t \mapsto e^{kt}$

$$(e^{kt})' = k e^{kt}$$

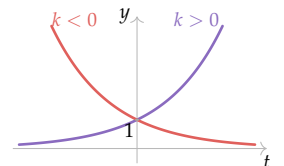
Comme $e^{kt} > 0$, la dérivée est du **signe de k** .

$k > 0$: **croissante**, croissance exponentielle.

$k < 0$: **décroissante**, décroissance exponentielle.

$k = 0$: fonction **constante** égale à 1.

$e^{k(n+1)} = e^{kn} \times e^k$: la suite (e^{kn}) est **géométrique** de raison e^k .



7. MÉTHODES ET PIÈGES CLASSIQUES

Étudier un signe

Le facteur e^u est **toujours positif** : il ne change jamais le signe.

Ex. : $(x-2)e^x$ est du signe de $x-2$.

Factoriser

Mettre e^x en facteur avant d'étudier un signe.

Ex. : $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$, nul pour $x = 0$.

Erreurs à éviter

$$e^{a+b} \neq e^a + e^b$$

$$e^{ab} \neq e^a \times e^b$$

$$(e^{2x})' \neq e^{2x} \quad (\text{il manque le facteur } 2)$$

À RETENIR

$\circ$ $\exp$: unique fonction avec $f' = f$, $f(0) = 1$.

$\odot$ $e^{a+b} = e^a e^b$: sommes $\rightarrow$ produits.

|||| $e^x > 0$ toujours.

$\checkmark$ $e^a = e^b \iff a = b$.