

DÉRIVATION

— PREMIÈRE SPÉ MATHS —

1. TAUX D'ACCROISSEMENT ET NOMBRE DÉRIVÉ

Taux d'accroissement

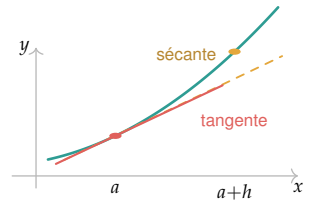
$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est le **coefficient directeur de la sécante** passant par les points d'abscisses a et $a+h$.

Nombre dérivé

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f est **dérivable en a** lorsque cette limite existe et est un nombre réel.



2. ÉQUATION DE LA TANGENTE

La tangente à C_f au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple

$f(x) = x^2$ et $a = 3$: $f(3) = 9$ et $f'(x) = 2x$ donc $f'(3) = 6$.
La tangente a pour équation $y = 6(x - 3) + 9$, soit $y = 6x - 9$.

La tangente est **horizontale** si et seulement si $f'(a) = 0$: c'est le cas en un **extremum local**.

3. DÉRIVÉES DES FONCTIONS USUELLES

$f(x)$	$f'(x)$	sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	$n x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

4. OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = k u'$$

$$(u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u(ax + b))' = a u'(ax + b)$$

5. DÉRIVÉE ET SENS DE VARIATION

Théorème

Soit f dérivable sur un intervalle I .
Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est **strictement croissante** sur I .
Si $f'(x) < 0$ sur I , alors f est **strictement décroissante** sur I .
Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est **constante** sur I .

Extremum local

Si f' **s'annule en changeant de signe** en x_0 , alors f admet un **extremum local** en x_0 .

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	-
f		max	

Méthode d'étude

- Justifier la dérivabilité et calculer $f'(x)$.
- Étudier le **signe de $f'(x)$** (souvent un trinôme, un produit ou un quotient).
- Dresser le **tableau de variations** en reportant les valeurs remarquables $f(x_0)$.

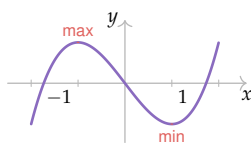
6. EXEMPLE D'ÉTUDE COMPLÈTE

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2; 2]$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

Trinôme de racines -1 et 1 , positif à l'extérieur des racines car $a = 3 > 0$.

x	-2	-1	1	2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	-2	2	-2	2	



7. APPLICATIONS

Approximation affine

$$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a) \quad \text{pour } h \text{ proche de } 0$$

Près de A , la courbe se confond avec sa tangente.

Vitesse instantanée

$$v(t) = x'(t)$$

La vitesse moyenne entre t et $t+h$ est un taux d'accroissement ; la vitesse instantanée en est la limite.

Coût marginal

$$C_m(q) \approx C'(q)$$

Coût de la $(q+1)$ -ième unité produite.

À RETENIR

$f'(a)$: coefficient directeur de la tangente.

Tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Le signe de f' donne les variations.

Extremum : f' change de signe.