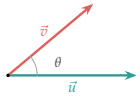
LE PRODUIT SCALAIRE

— PREMIÈRE SPÉ MATHS —

1. FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Le résultat est un **nombre réel**, pas un vecteur.



θ est l'angle géométrique entre les deux vecteurs ; son cosinus fixe le **signe** du produit scalaire.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires de **même sens** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
de **sens contraires** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
orthogonaux : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

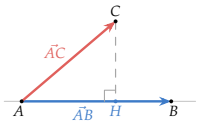
$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \quad \text{(carré scalaire)}$$

2. PROJETÉ ORTHOGONAL

Si H est le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = +AB \times AH$ si $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$ ont le **même sens** ;
$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB \times AH$ s'ils sont de **sens contraires**.



Méthode très efficace dans les figures usuelles (carré, triangle équilatéral, losange) où les longueurs se lisent directement.

3. FORMULE ANALYTIQUE

Dans un repère **orthonormé**, avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff xx' + yy' = 0$$

C'est le critère d'orthogonalité à utiliser dès que l'on dispose de coordonnées.

4. FORMULES AVEC LES NORMES

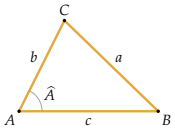
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

*À utiliser quand l'énoncé ne donne que des **longueurs** et aucune coordonnée ni angle.*

5. THÉORÈME D'AL-KASHI ET THÉORÈME DE LA MÉDIANE



Théorème d'Al-Kashi

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$.

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Généralise le théorème de Pythagore, retrouvé lorsque $\hat{A} = 90°$.

Théorème de la médiane

Si I est le milieu de $[BC]$:

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$AB^2 - AC^2 = 2\,\vec{IA} \cdot \vec{CB}$$

6. ÉQUATIONS DE DROITES ET DE CERCLES

Droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$ax + by + c = 0$$

On détermine c avec les coordonnées d'un point de la droite.

Cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon r

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Cercle de diamètre $[AB]$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

7. ENSEMBLES DE POINTS

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$: **cercle de diamètre** $[AB]$.

$\vec{MA} \cdot \vec{u} = 0$: **droite** passant par A et de vecteur normal $\vec{u}$.

$MA = r$: **cercle** de centre A et de rayon r.

$MA^2 - MB^2 = k$: **droite perpendiculaire** à (AB).

Méthode : traduire la condition avec le produit scalaire, puis passer aux coordonnées ou reconnaître directement la forme.

À RETENIR

- Un produit scalaire est un *nombre*, pas un vecteur.
- Coordonnées $\Rightarrow xx' + yy'$; longueurs $\Rightarrow$ normes.
- Orthogonalité $\iff$ produit scalaire nul.
- Al-Kashi généralise Pythagore.

pierre-carree.fr