FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

1) Calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

$$\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1$$

$$\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)$$

$$\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2$$

$$\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Or $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{5} \leq 2\pi$ donc $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) \geq 0$

Ainsi $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

$0 \leq \frac{\pi}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

Partie B :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$.

1. Démontrer que la fonction est 2π-périodique.

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}$$

Or les fonctions $sin(x)$ et $cos(x)$ sont 2π-périodiques donc

$$f(x+2\pi) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} = f(x)$$

Et la fonction f est 2π-périodique.

2. Étudier la parité de f.

Exprimons $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}$$

$$f(-x) = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}$$

$$f(-x) = -\frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

donc la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on dire de la fonction f ?

$$f(-x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(-x)\right) = \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) = -f(x)$$

La fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x+4\pi) = f(x)$. Que peut-on dire de la fonction f ?

pour tout réel x :

$$f(x+4\pi) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}(x+4\pi)\right)$$

$$f(x+4\pi) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{4\pi}{2}\right)$$

$$f(x+4\pi) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x+2\pi\right)$$

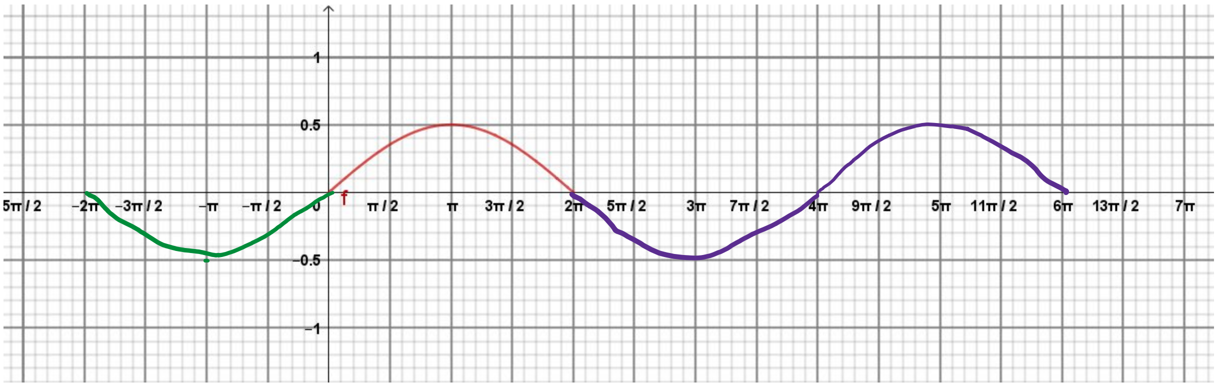
et la fonction sin(x) est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

$$f(x+4\pi) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$f(x+4\pi) = f(x)$$

Donc f est périodique de période 4π.

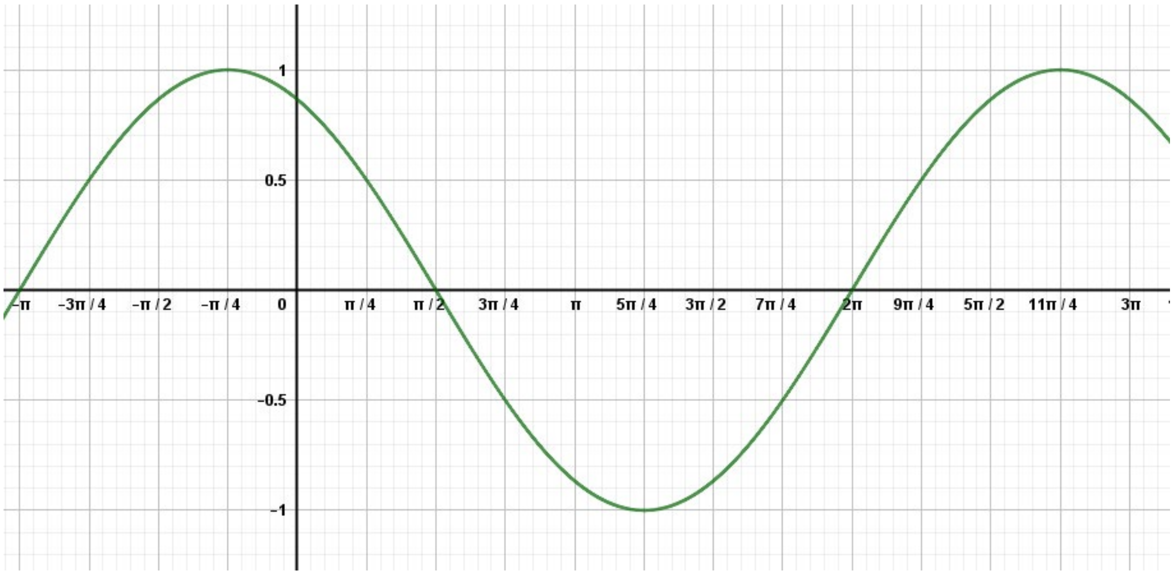
3. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0 ; 2π]. Compléter le graphique afin de représenter la fonction sur l'intervalle [-2π ; 6π]. Justifier la construction.



On dessine C_f par symétrique centrale sur [-2**π** ;0]. On dessine C_f par translation de [-2π ; 2π] sur [2π ;6π]

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous :



a. Conjecturer la parité et la périodicité de f.
Cf n'est ni symétrique par rapport à l'origine du repère ni par rapport à l'axe des ordonnées. Donc f semble ni paire, ni impaire.
f semble périodique de période 3π.

b. Sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$, démontrer les conjectures émises à la question précédente.
$f(-x) = \sin\left(-\frac{2x}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $-f(x) = -\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$
$f(-x) \neq f(x)$ et -$f(x) \neq f(x)$ donc f n'est ni paire ni impaire.

$$f(x + 3\pi) = \sin\left(\frac{2(x + 3\pi)}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2x + 6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$f(x+3\pi)=\sin\left(\frac{2x}{3}+2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2x}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$$

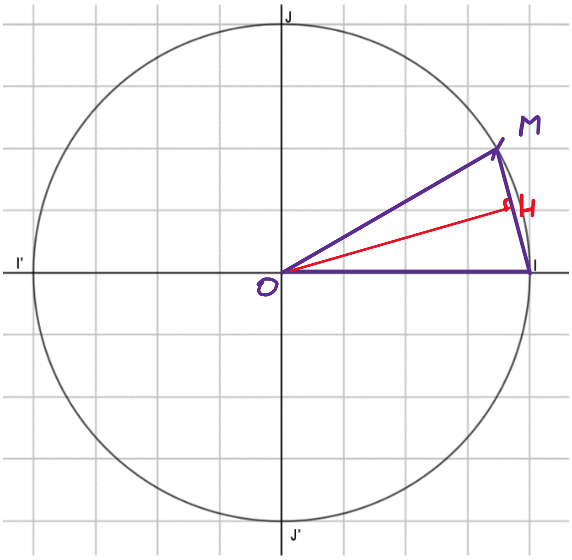
donc f est 3π-périodique.

Exercice 4

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan muni qu'un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

Soit M le point de $\mathcal{C}$ associé au réel $\frac{\pi}{6}$.

1. Faire une figure (cf. annexe) que l'on complétera tout au long de l'exercice.
2. **a.** Déterminer les coordonnées de M.



$$M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

b. En déduire que :

$IM=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ où I est le point de coordonnées (1 ; 0) dans $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

$$IM=\sqrt{(x_M-x_I)^2+(y_M-y_I)^2}$$

$$IM=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}$$

$$IM=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-\sqrt{3}+1\right)+\frac{1}{4}}$$

$$IM=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

3. Soit H le pied de la hauteur du triangle OIM issue du point O.

a. Justifier que

- H est le milieu du segment [IM].

  Dans le triangle OIM, OI = OM = 1 donc OIM est isocèle en O. La hauteur issue de O est également médiatrice de [IM] donc H, pied de la hauteur, est également milieu de [IM].

- Le triangle OHM est rectangle.

  [OH] est la hauteur issue de O relative au côté [IM] donc (OH) et (IM) sont perpendiculaires en H et OHM est rectangle en H.

b. Montrer que $HM=\sin\frac{\pi}{12}$.

Dans le triangle OIM isocèle en O on a $\widehat{IOM}=\frac{\pi}{6}$ donc $\widehat{OMH}=\widehat{OIH}=\frac{5\pi}{12}$

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a $\widehat{HMO} = \frac{5\pi}{12}$, $\widehat{MHO} = \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{12}$.

D'après la trigonométrie $\sin(\widehat{HOM}) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM$

Ainsi $HM = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

4. En déduire que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

De plus $HM = \frac{IM}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ donc $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

5. Bonus : Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

$$\cos^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{\pi}{12} = 1$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

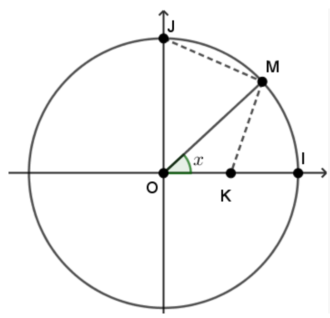
et $0 \leq \frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$

Donc :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Exercice 5

On considère le point $K\left(\frac{1}{2};0\right)$ et un point M sur le cercle trigonométrique.



On note x une mesure en radian de $\widehat{IOM}$.

1) Démontrer que :

$KM = \sqrt{\frac{5}{4} - \cos(x)}$ et $JM = \sqrt{2 - 2\sin(x)}$

$$KM = \sqrt{(x_M - x_K)^2 + (y_M - y_K)^2} = \sqrt{\left(\cos(x) - \frac{1}{2}\right)^2 + (\sin(x) - 0)^2}$$

$$KM = \sqrt{\cos^2(x) - 2 \times \cos(x) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sin^2(x)} = \sqrt{-\cos(x) + \frac{1}{4} + \cos^2(x) + \sin^2(x)}$$

$$KM = \sqrt{-\cos(x) + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4} - \cos(x)}$$

$$JM = \sqrt{\left(x_M - x_J\right)^2 + \left(y_M - y_J\right)^2} = \sqrt{(\cos(x) - 0)^2 + (\sin(x) - 1)^2}$$

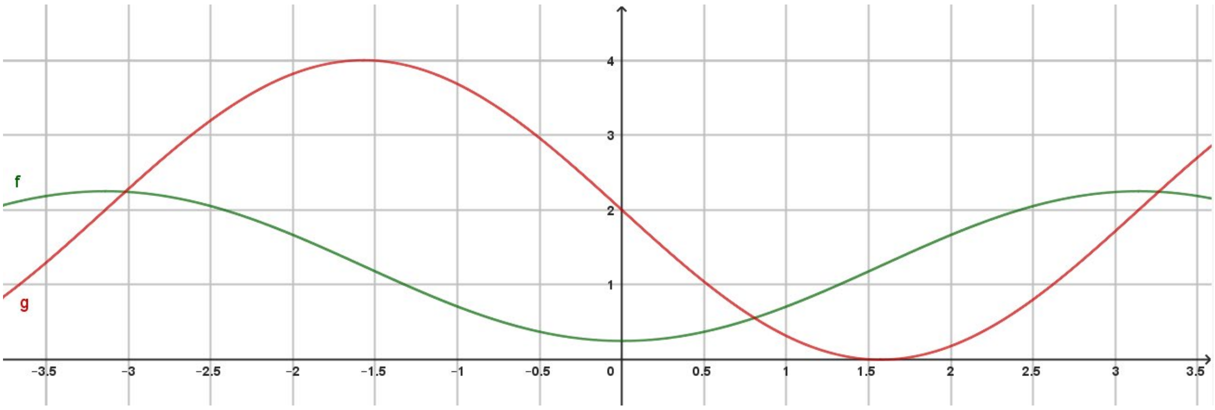
$$JM = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x) - 2\sin(x) + 1} = \sqrt{1 - 2\sin(x) + 1}$$

$$JM = \sqrt{2 - 2\sin(x)}$$

Pour la suite de l'exercice, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{5}{4} - \cos(x)$ et $g(x) = 2 - 2\sin(x)$

2) On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g. A l'aide du graphique, donner des valeurs approchées de x dans $]-\pi;\ \pi]$ pour lesquelles M appartient à la médiatrice de [JK]. Justifier.



Un point appartient à la médiatrice d'un segment s'il est situé à égale distance des extrémités de ce segment. Ainsi M appartient à la médiatrice de [JK] si JK= KM.

On f(x)=KM² et g(x)=JM²

Et KM = JM équivaut à KM² = JM²

Donc KM = JM quand f(x) = g(x) c'est-à-dire quand Cf coupe Cg.

Sur l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$, on a KM = JM pour $x = \{-3; 0{,}8\}$