FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A :

Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

1) Calculer la valeur de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Partie B :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$.

1. Démontrer que la fonction est 2π-périodique.

2. Étudier la parité de f.

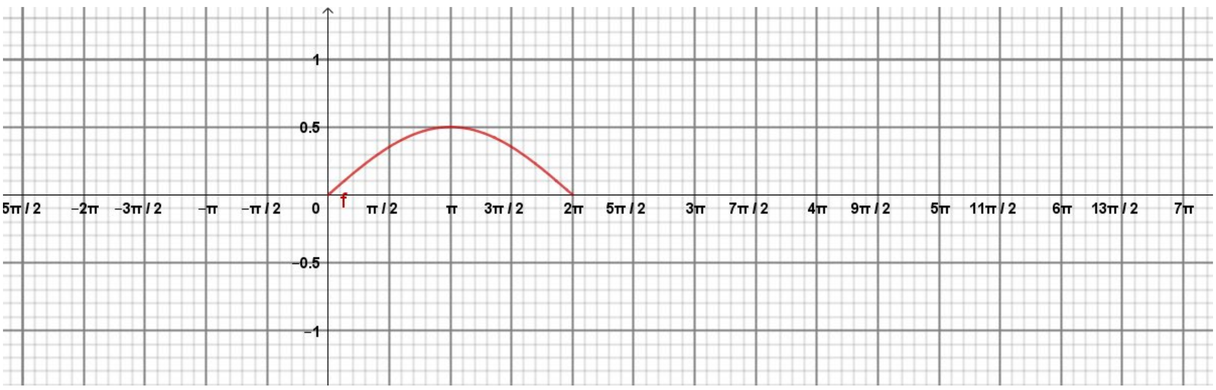
Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$. Que peut-on dire de la fonction f ?

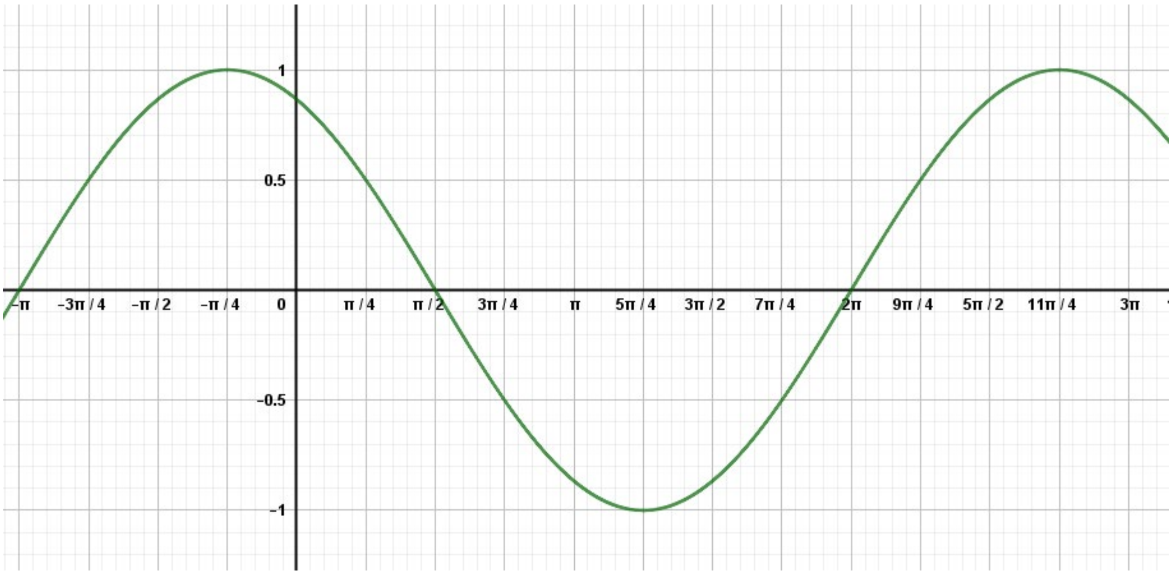
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x+4\pi) = f(x)$. Que peut-on dire de la fonction f ?

3. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle [0 ; 2π]. Compléter le graphique afin de représenter la fonction sur l'intervalle [-2π ; 6π]. Justifier la construction.



Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous :



a. Conjecturer la parité et la périodicité de f.

b. Sachant que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$, démontrer les conjectures émises à la question précédente.

Exercice 4

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique dans le plan muni qu'un repère $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

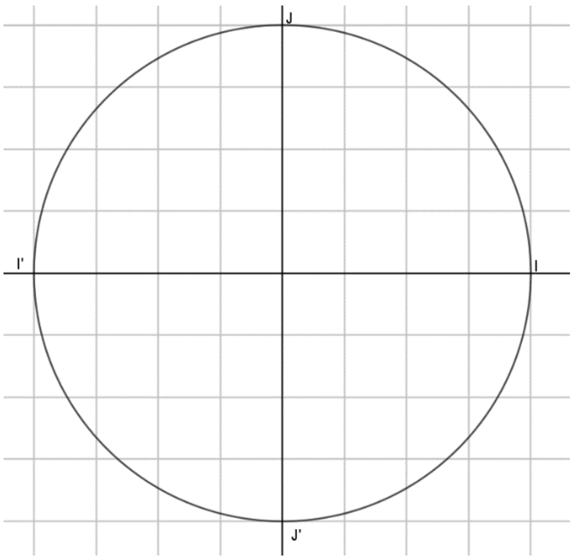
Soit M le point de $\mathcal{C}$ associé au réel $\frac{\pi}{6}$.

1. Faire une figure (cf. annexe) que l'on complétera tout au long de l'exercice.
2. **a.** Déterminer les coordonnées de M.

   b. En déduire que :

   $$IM = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

   où I est le point de coordonnées (1 ; 0) dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.



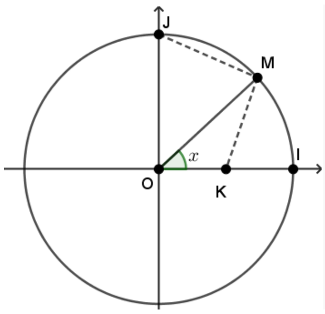
3. Soit H le pied de la hauteur du triangle OIM issue du point O.

   a. Justifier que
   - H est le milieu du segment [IM].
   - Le triangle OHM est rectangle.

   b. Montrer que $HM = \sin\frac{\pi}{12}$.
4. En déduire que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.
5. Bonus : Déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5

On considère le point $K\ (\frac{1}{2};0)$ et un point M sur le cercle trigonométrique.



On note x une mesure en radian de $\widehat{IOM}$.

1) Démontrer que :

$$KM = \sqrt{\frac{5}{4} - \cos(x)} \quad \text{et} \quad JM = \sqrt{2 - 2\sin(x)}$$

Pour la suite de l'exercice, on considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{5}{4} - \cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = 2 - 2\sin(x)$$

2) On donne ci-dessous les représentations graphiques des fonctions f et g. A l'aide du graphique, donner des valeurs approchées de x dans $]-\pi;\ \pi]$ pour lesquelles M appartient à la médiatrice de [JK]. Justifier.