

Variables aléatoires

PREMIÈRE

1 Variable aléatoire réelle

Définition

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui, à chaque issue ω d'un univers Ω , associe un nombre réel $X(\omega)$.

Définition

La **loi de probabilité** de X est la donnée des probabilités de tous les événements $\{X = x_i\}$, où les réels $x_1, \dots, x_r$ sont les valeurs prises par X :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_r
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_r

Propriété

La somme des probabilités de la loi vaut 1 :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_r) = p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$$

Propriété

Événements liés à X :

- $\{X = x_i\}$ est l'événement formé de toutes les issues associées au réel x_i ;
- $\{X < x_i\}$ est l'événement formé de toutes les issues associées à un réel strictement inférieur à x_i ;
- $\{X \geq x_i\}$ est l'événement formé de toutes les issues associées à un réel supérieur ou égal à x_i .

Méthode

Exemple : On joue à un jeu où l'on gagne 5 € avec une probabilité 0,2, on ne gagne ni ne perd rien avec une probabilité 0,3, et on perd 2 € avec une probabilité 0,5. Soit X le gain algébrique du joueur.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-2	0	5
$P(X = x_i)$	0,5	0,3	0,2

On vérifie que $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$.

2 Espérance, variance et écart-type

Définition

L'espérance de la variable aléatoire X est le nombre réel :

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_r p_r$$

Interprétation : $E(X)$ est la valeur moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois.

Définition

La **variance** de X est le nombre réel positif :

$$V(X) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + [x_2 - E(X)]^2 p_2 + \cdots + [x_r - E(X)]^2 p_r$$

Propriété

Formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Définition

L'**écart-type** de X est le nombre réel positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Méthode

Exemple : Reprenons la loi de X ci-dessus : $P(X = -2) = 0,5$, $P(X = 0) = 0,3$, $P(X = 5) = 0,2$.

$$E(X) = (-2) \times 0,5 + 0 \times 0,3 + 5 \times 0,2 = -1 + 0 + 1 = 0$$

$$V(X) = (-2 - 0)^2 \times 0,5 + (0 - 0)^2 \times 0,3 + (5 - 0)^2 \times 0,2 = 2 + 0 + 5 = 7$$

$$\sigma(X) = \sqrt{7} \approx 2,65$$

Vérification par König-Huygens : $E(X^2) = (-2)^2 \times 0,5 + 0^2 \times 0,3 + 5^2 \times 0,2 = 2 + 0 + 5 = 7$, donc $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 7 - 0^2 = 7$. On retrouve bien le même résultat.

À retenir

$$\sum p_i = 1 \quad ; \quad E(X) = \sum x_i p_i \text{ (valeur moyenne)} \quad ; \quad V(X) = \sum [x_i - E(X)]^2 p_i = E(X^2) - (E(X))^2 \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$