

Probabilités conditionnelles et indépendance

PREMIÈRE

A et B sont deux événements d'un univers donné Ω .

1 Arbres pondérés et probabilités totales

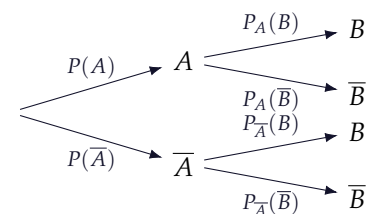
Définition

Si $P(A) \neq 0$, la **probabilité conditionnelle** de B sachant A , notée $P_A(B)$, est :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propriété

- Si $P(A) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
- Si $P(B) \neq 0$: $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$



Propriété

Formule des probabilités totales : si les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de Ω (non vides, deux à deux incompatibles, de réunion Ω), alors, pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Cas particulier : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

Méthode

Exemple : On donne $P(A) = 0,4$, $P_A(B) = 0,3$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,5$. Calculer $P(B)$.
Comme $P(\bar{A}) = 1 - 0,4 = 0,6$, la formule des probabilités totales donne :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,5 = 0,12 + 0,3 = 0,42$$

2 Probabilités et indépendance

Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Propriété

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants

- $P_A(B) = P(B)$ (si $P(A) \neq 0$)
- $P_B(A) = P(A)$ (si $P(B) \neq 0$)
- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Méthode

Exemple : On donne $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ et $P(A \cap B) = 0,15$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

On compare $P(A \cap B)$ à $P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$. Comme $P(A \cap B) = 0,15 = P(A) \times P(B)$, A et B sont **indépendants**.

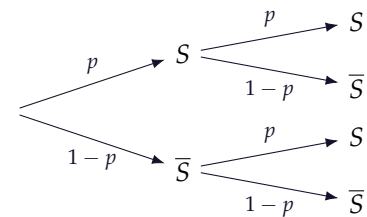
3 Succession et répétition d'épreuves de Bernoulli

Propriété

La succession de deux épreuves indépendantes peut être représentée par un **arbre pondéré** (les probabilités le long d'un même chemin se multiplient) ou par un **tableau** à double entrée.

Définition

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues : un **succès** S , de probabilité p , et un **échec** $\bar{S}$, de probabilité $1 - p$.



Méthode

Exemple : On répète 2 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,2$. Calculer la probabilité d'obtenir **exactement un succès**.

Deux chemins de l'arbre donnent exactement un succès : $(S, \bar{S})$ et $(\bar{S}, S)$, chacun de probabilité $p(1 - p)$.

$$P(\text{exactement un succès}) = 2 \times p \times (1 - p) = 2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,32$$

À retenir

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A) \quad ; \quad \text{probabilités totales :}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B).$$

$$\text{Indépendance : } P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A).$$

Bernoulli : succès de probabilité p , échec $1 - p$; épreuves indépendantes $\Rightarrow$ probabilités multiplicatives le long d'un chemin.