

Géométrie repérée

PREMIÈRE

1 Droites et cercles dans un repère

Définition

Soit A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul. La **droite de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A** est l'ensemble des points M du plan tels que :

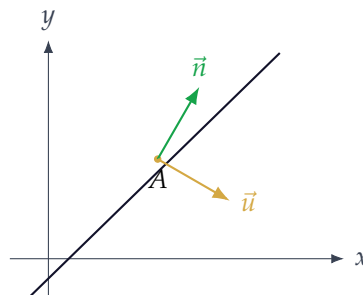
$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Propriété

Dans un repère orthonormé, toute droite admet une **équation cartésienne** de la forme :

$$ax + by + c = 0 \quad \text{avec } (a, b) \neq (0, 0)$$

Pour une telle équation : le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à la droite, et le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un **vecteur directeur**.



Méthode

Exemple : Déterminer une équation de la droite d passant par $A(3;1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Une équation de d est de la forme $2x - y + c = 0$. Comme $A \in d$:

$$2 \times 3 - 1 \times 1 + c = 0 \iff c = -5$$

$$d : 2x - y - 5 = 0$$

Définition

Soit A un point et r un réel positif. Le **cercle de centre A et de rayon r** est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$AM = r$$

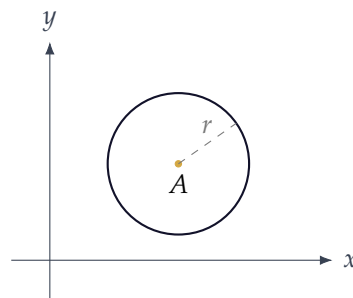
Propriété

Dans un repère orthonormé, une **équation cartésienne** du cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$

Cette équation peut se mettre, après développement, sous la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

**Méthode**

Exemple : Le cercle de centre $A(2; -1)$ et de rayon 3 a pour équation :

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$$

En développant : $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$, soit $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.

Exemple : Déterminer le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0$.

On regroupe les termes en x et en y , puis on complète le carré :

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 6 \iff (x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 = 6 \iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

Le cercle a pour centre $(3; -1)$ et pour rayon $\sqrt{16} = 4$.

À retenir

Droite : $ax + by + c = 0$, vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Cercle de centre $A(x_A; y_A)$, rayon r : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2 \iff x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (après développement).