

Calcul vectoriel — Produit scalaire

PREMIÈRE

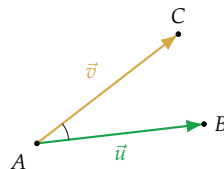
1 Produit scalaire dans le plan

Définition

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs non nuls. Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

(par convention, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

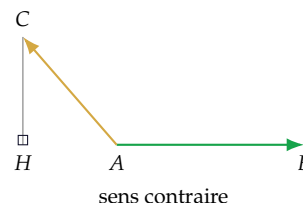
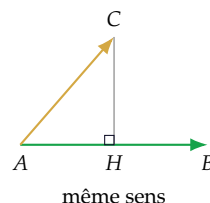


Propriété

Projeté orthogonal : soit trois points A, B, C avec $A \neq B$. On appelle H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) . Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de **même sens** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH$;
- si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de **sens contraire** : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$.



Propriété

Expression analytique : soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Méthode

Exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 4 = 2 \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Exemple : Si $AB = 5$ et H est le projeté orthogonal de C sur (AB) avec $AH = 2$ et $\overrightarrow{AH}$ de même sens que $\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 5 \times 2 = 10$.

2 Propriétés du produit scalaire

Propriété

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et k un réel.

- **Symétrie :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité :** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

Méthode

Exemple : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \times 5 = 35 \qquad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 5 = 15$$

3 Applications du produit scalaire

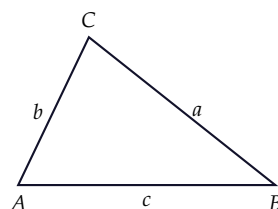
Propriété

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Deux droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires** si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Propriété

Formule d'Al-Kashi : pour tout triangle ABC (avec les notations usuelles $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$) :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$



Propriété

Le **cercle de diamètre** $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Méthode

Exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-6) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

Exemple : Formule d'Al-Kashi : si $b = 5$, $c = 7$ et $\hat{A} = 60$, alors $a^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \times \cos(60) = 74 - 35 = 39$, donc $a = \sqrt{39}$.

Exemple : Soit $A(0;0)$ et $B(4;0)$. Pour $M(2;2)$: $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -4 + 4 = 0$: M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

À retenir

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{BAC}) = xx' + yy' = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ (projeté). Symétrie, bilinéarité, $\|\vec{u} \pm \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \pm 2\vec{u} \cdot \vec{v}$.
 $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$ Cercle de diamètre $[AB]$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.