

Trigonométrie

PREMIÈRE

1 Le cercle trigonométrique

Définition

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1, muni du **sens direct** (ou **sens trigonométrique**), qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le sens contraire est appelé **sens indirect**.

Définition

En **enroulant la droite numérique** autour du cercle trigonométrique (le point d'abscisse 0 étant placé en $I(1;0)$, les réels positifs s'enroulant dans le sens direct), on associe à tout réel x un unique point M du cercle, appelé **point image** de x .

Propriété

Deux réels x et $x + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) ont le **même point image** sur le cercle trigonométrique : l'enroulement se répète tous les 2π (un tour complet).

x (en degrés)	0	30	45	60	90	180
x (en radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Méthode

Exemple : Déterminer le point image de $\frac{17\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

On retranche des multiples de $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ jusqu'à obtenir un réel de $[0; 2\pi[$:

$$\frac{17\pi}{4} = \underbrace{2 \times 2\pi}_{= \frac{16\pi}{4}} + \frac{\pi}{4}$$

Le point image de $\frac{17\pi}{4}$ est donc le même que celui de $\frac{\pi}{4}$.

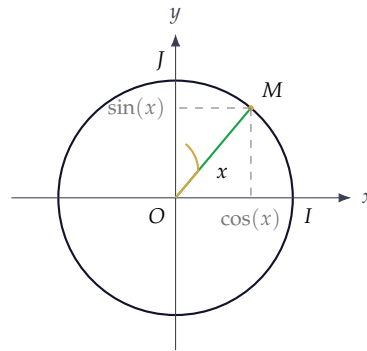
2 Propriétés du cosinus et du sinus d'un nombre réel

Définition

Soit x un réel et M son point image sur le cercle trigonométrique, dans un repère orthonormé $(O; I, J)$. Les coordonnées de M sont :

$$M(\cos(x); \sin(x))$$

$\cos(x)$ est l'**abscisse** de M et $\sin(x)$ son **ordonnée**.



Propriété

Pour tout réel x et tout entier relatif k :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \qquad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Méthode

Exemple : Calculer $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.

On retranche un multiple de $2\pi = \frac{6\pi}{3}$: $\frac{13\pi}{3} = \underbrace{2 \times 2\pi}_{= \frac{12\pi}{3}} + \frac{\pi}{3}$, donc $\frac{13\pi}{3}$ a le même point image que $\frac{\pi}{3}$.

$$\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

À retenir

Point image de x : $M(\cos x ; \sin x)$ sur le cercle trigonométrique. Périodicité : $\cos$ et $\sin$ se répètent tous les 2π .

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad ; \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$