

Fonction exponentielle

PREMIÈRE

1 Définition de la fonction exponentielle

Définition

La **fonction exponentielle**, notée $\exp$ ou $x \mapsto e^x$, est l'**unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

Définition

Le nombre e est défini par $e = \exp(1)$; on a $e \approx 2,72$ à 0,01 près.

Propriété

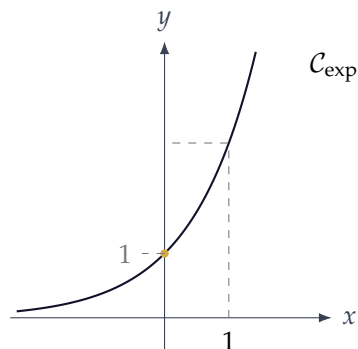
Pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \exp(0) = 1 \quad \exp(x) \text{ se note } e^x$$

Propriété

La fonction exponentielle est **strictement positive** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$:

$$\text{pour tout réel } x, \quad e^x > 0$$



Méthode

Exemple : Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , l'équation $e^x = -3$ n'a **aucune solution** dans $\mathbb{R}$.

Exemple : La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a par exemple $e^2 < e^3$ sans calculer ces deux valeurs.

2 Applications de la fonction exponentielle

Propriété

Propriétés algébriques : pour tous réels a, b et tout entier n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad e^{na} = (e^a)^n$$

Méthode

Exemple : Simplifier $A(x) = e^{2x} \times e^{x+1}$: $A(x) = e^{2x+(x+1)} = e^{3x+1}$.

Exemple : Simplifier $B(x) = \frac{e^{3+2x}}{e^{2x-1}}$: $B(x) = e^{(3+2x)-(2x-1)} = e^4$.

Propriété

Pour tout réel a , la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{at}$ est dérivable, et pour tout réel t :

$$f'(t) = a e^{at}$$

Propriété

Pour tout réel a , la suite (u_n) de terme général $u_n = e^{na}$ est **géométrique** de raison e^a , car pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$$

Propriété

Résolution d'équations ou d'inéquations : pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \iff a = b \qquad e^a < e^b \iff a < b$$

(et, de même, $e^a \leq e^b \iff a \leq b$, la fonction exponentielle étant strictement croissante).

Méthode

Exemple : Résoudre $e^{2x+1} = e^{x+5}$: cette équation équivaut à $2x+1 = x+5$, soit $x = 4$. $S = \{4\}$.

Exemple : Résoudre $e^{3x} < e^{x+4}$: cette inéquation équivaut à $3x < x+4$, soit $2x < 4$, donc $x < 2$.
 $S =]-\infty; 2[$.

À retenir

$e^x > 0$ pour tout x ; $\exp$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$; $e^{a+b} = e^a e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$, $e^{na} = (e^a)^n$.
 $e^a = e^b \iff a = b$; $e^a < e^b \iff a < b$; $(e^{na})_n$ est géométrique de raison e^a .