

Variations et courbes

PREMIÈRE

1 Dérivée et variations d'une fonction

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , de dérivée f' sur I .

- « Pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ » équivaut à « f est **croissante** sur I » ;
- « Pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ » équivaut à « f est **décroissante** sur I ».

Méthode

Exemple : Soit $f(x) = x^3 - 3x$ sur $[-3; 3]$. On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, qui s'annule en -1 et 1 .

x	-3	-1	1	3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-18	2	-2	18	

Propriété

Position relative de deux courbes : pour étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère, on étudie le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$ sur l'intervalle considéré.

- si $h(x) \geq 0$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ (ou tangente à elle si $h(x) = 0$) ;
- si $h(x) \leq 0$: $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$.

Méthode

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x$. On étudie $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Comme $h(x) \geq 0$ pour tout réel x (avec égalité en $x = 1$), $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{C}_g$, et les deux courbes sont tangentes au point d'abscisse 1.

Propriété

Inégalité sur un intervalle : pour obtenir une inégalité sur un intervalle I , on peut utiliser les variations d'une fonction f sur I .

- lorsque le **minimum** de f sur I est positif (ou nul), alors, pour tout x de I , $f(x) \geq 0$;
- lorsque le **maximum** de f sur I est négatif (ou nul), alors, pour tout x de I , $f(x) \leq 0$.

Méthode

Exemple : Montrons que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$. On a $g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, qui s'annule en 0 et 2 : g est décroissante sur $[0; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$. Le minimum de g sur $[0; +\infty[$ est donc atteint en $x = 2$:

$$g(2) = 8 - 12 + 4 = 0$$

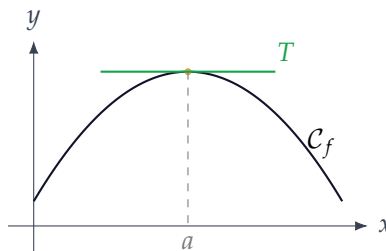
Comme ce minimum est nul (donc positif ou nul), on a bien $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

2 Extremums**Propriété**

Soit I un intervalle ouvert et a un réel de I . Si f admet un **extremum** (maximum ou minimum) en a , alors :

$$f'(a) = 0$$

et la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est **parallèle à l'axe des abscisses** (horizontale).

**Propriété**

Réciproque (condition suffisante) : soit I un intervalle ouvert et a un réel de I . Si $f'(x)$ s'annule en changeant de signe en a , alors f admet un **extremum local** en a — un maximum si f' passe du signe $+$ au signe $-$, un minimum si f' passe du signe $-$ au signe $+$.

À retenir

Attention : $f'(a) = 0$ seul ne suffit pas à garantir un extremum (*Exemple :* $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ sans que f admette d'extremum en 0, car f' ne change pas de signe). Il faut vérifier que f' change de signe en a .

Méthode

Exemple : Pour $f(x) = x^3 - 3x$ (voir tableau ci-dessus), f' s'annule en -1 en passant de $+$ à $-$: f admet donc un **maximum local** en -1 , égal à $f(-1) = 2$.
De même, f' s'annule en 1 en passant de $-$ à $+$: f admet un **minimum local** en 1 , égal à $f(1) = -2$.