

Dérivation

PREMIÈRE

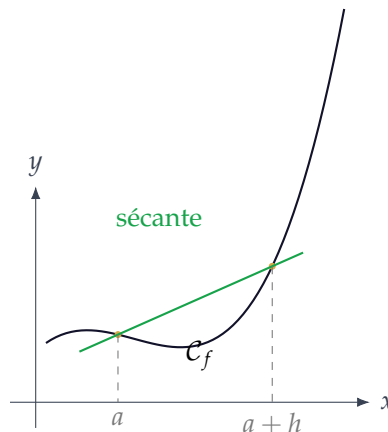
1 Point de vue local

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a et $a + h$ (avec $h \neq 0$). Le **taux de variation** de f entre a et $a + h$ est le nombre :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ce taux est le **coefficient directeur (la pente)** de la sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par les points d'abscisses a et $a + h$.



Définition

Si le taux de variation $\tau(h)$ admet une **limite finie** lorsque h tend vers 0, on dit que f est **dérivable en a** , et cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a , noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Propriété

Interprétations du nombre dérivé $f'(a)$ selon le contexte :

- en **Physique** : si $f(t)$ décrit une position en fonction du temps t , $f'(a)$ est la **vitesse instantanée** à l'instant a ;
- en **SES** : si $f(n)$ décrit un coût de production, $f'(n)$ donne une **approximation du coût marginal** (coût de production d'une unité supplémentaire).

Méthode

Exemple : Soit $f(x) = x^2 - 3x$. Calculons $f'(2)$.

$$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{[(2+h)^2 - 3(2+h)] - (-2)}{h} = \frac{h^2 + h}{h} = h + 1$$

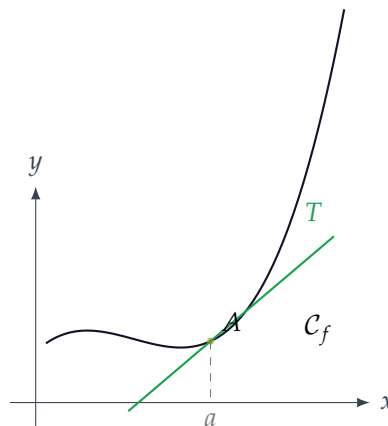
Comme $\lim_{h \rightarrow 0} (h + 1) = 1$, f est dérivable en 2 et $f'(2) = 1$.

2 Point de vue global

Définition

Si f est dérivable en a , la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite passant par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$. Elle admet pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$



Propriété

Au voisinage de a , la courbe $\mathcal{C}_f$ se confond approximativement avec sa tangente : on dit que la **fonction affine tangente** à f en a ,

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$$

donne une bonne approximation de f pour x proche de a . En posant $x = a + h$ (avec h proche de 0), on obtient l'**approximation affine** :

$$f(a + h) \approx f(a) + h f'(a)$$

Méthode

Exemple : On admet que pour $g(x) = x^3$, $g'(x) = 3x^2$. Tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 : $g(1) = 1$ et $g'(1) = 3$.

$$y = 1 + 3(x - 1) = 3x - 2$$

Exemple : Si $f(5) = 12$ et $f'(5) = -2$, une valeur approchée de $f(5,1)$ est :

$$f(5,1) \approx f(5) + 0,1 \times f'(5) = 12 - 0,2 = 11,8$$

À retenir

Taux de variation : $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ (pente d'une sécante).

Nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau(h)$ (pente de la tangente en a).

Tangente en a : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. **Approximation affine :** $f(a + h) \approx f(a) + h f'(a)$.

pierre-carree.fr — Ressources gratuites de mathématiques