

Suites numériques

PREMIÈRE

1 Les suites numériques

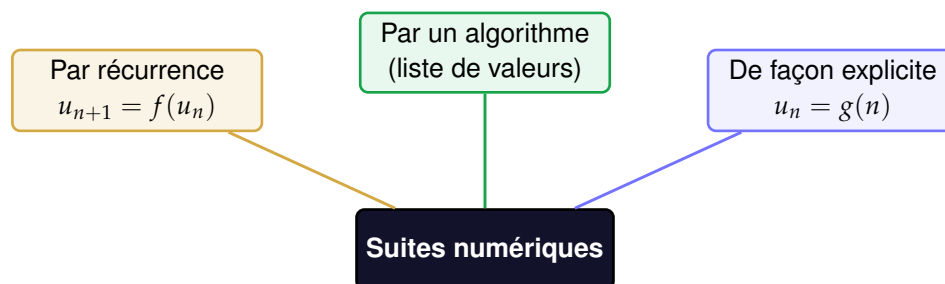
Définition

Une **suite numérique** (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels $u_0, u_1, u_2, \dots$, indexée par les entiers naturels : à chaque entier n correspond un unique terme u_n , appelé **terme de rang n** (ou terme d'indice n).

Propriété

Une suite peut être définie de trois façons :

- **par récurrence** : $u_{n+1} = f(u_n)$ — chaque terme se calcule à partir du précédent ;
- **de manière explicite** : $u_n = g(n)$ — chaque terme se calcule directement en fonction de n ;
- **par un algorithme** : une boucle permet de calculer et de stocker les termes dans une liste.



Méthode

Exemple : Suite définie par récurrence : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

$$u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5 \qquad u_2 = 2 \times 5 + 3 = 13$$

Exemple : Suite définie explicitement : $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ donne directement $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{4}{3}$, $u_2 = \frac{7}{4}$, sans passer par les termes précédents.

2 Étude algorithmique et notion de limite

Propriété

Lorsqu'une suite est définie par récurrence, un **algorithme** (boucle `for`) permet de calculer et de stocker successivement ses termes dans une liste, ou de déterminer le premier rang n à partir duquel u_n vérifie une condition donnée (seuil).

Définition

Étudier la **limite** d'une suite (u_n) , c'est observer le comportement de u_n lorsque n devient très grand.

- si les termes u_n se rapprochent d'un nombre réel ℓ , on dit que (u_n) **converge** vers ℓ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$;
- si les termes u_n deviennent aussi grands que l'on veut (resp. aussi petits, c'est-à-dire négatifs et grands en valeur absolue), on dit que (u_n) **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) ;
- une suite qui n'admet aucune limite (finie ou infinie) est dite **divergente sans limite**.

Propriété

Limite d'une suite géométrique (q^n) selon les valeurs de q :

- si $q > 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$;
- si $q = 1$: $q^n = 1$ pour tout n (suite constante) ;
- si $-1 < q < 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;
- si $q \leq -1$: (q^n) n'a pas de limite (elle oscille en changeant de signe).

Méthode

Exemple : $(0,5)^n$ a pour limite 0 car $-1 < 0,5 < 1$.

Exemple : $1,2^n$ a pour limite $+\infty$ car $1,2 > 1$.

3 Les suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r , appelé **raison**, tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, on montre que $u_{n+1} - u_n$ est un réel indépendant de n .

Propriété

Si (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 + nr \quad (\text{plus généralement : } u_n = u_p + (n - p)r)$$

Propriété

Somme de termes consécutifs : la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut $\frac{\text{nombre de termes}}{2} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})$.

Cas particulier à connaître :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Méthode

Exemple : Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 4$ et $r = 3$. Alors $u_n = 4 + 3n$, donc $u_{10} = 4 + 30 = 34$.

Exemple : $u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$ (soit 11 termes) = $\frac{11}{2} \times (4 + 34) = 209$.

4 Les suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel q , appelé **raison**, tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Pour prouver qu'une suite (à termes non nuls) est géométrique, on montre que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est un réel indépendant de n .

Propriété

Si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad (\text{plus généralement : } u_n = u_p \times q^{n-p})$$

Propriété

Somme de termes consécutifs (pour $q \neq 1$) : la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q vaut :

$$u_0 + u_0q + \cdots + u_0q^n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cas particulier à connaître :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode

Exemple : Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 3$ et $q = 2$. Alors $u_n = 3 \times 2^n$, donc $u_5 = 3 \times 32 = 96$.

Exemple : $u_0 + u_1 + \cdots + u_5 = 3 \times \frac{1 - 2^6}{1 - 2} = 3 \times \frac{1 - 64}{-1} = 3 \times 63 = 189$.

À retenir

Suite arithmétique (raison r)

$$u_{n+1} - u_n = r$$

$$u_n = u_0 + nr$$

$$\text{somme} = \frac{\text{nb termes}}{2} (\text{1}^{\text{er}} + \text{dernier})$$

Suite géométrique (raison q)

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$\text{somme} = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$