

Second degré

PREMIÈRE

1 Fonction polynôme du second degré

Définition

Une **fonction polynôme du second degré** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a, b, c \text{ réels et } a \neq 0$$

Cette écriture est appelée **forme développée** de f .

Propriété

Toute fonction polynôme du second degré peut aussi s'écrire sous **forme canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Méthode

Exemple : Écrire $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ sous forme canonique.

On calcule $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = 2$, puis $\beta = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = -5$.

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$$

2 Équation du second degré

Définition

Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, on appelle **discriminant** de f le nombre réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dépend du signe de Δ :

- si $\Delta > 0$: **deux solutions distinctes** $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$: **une seule solution** (racine double) $x_0 = -\frac{b}{2a}$
- si $\Delta < 0$: **aucune solution réelle**

Propriété

Lorsque $\Delta \geq 0$, les racines x_1 et x_2 (éventuellement confondues) vérifient :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Et f se factorise alors sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Méthode

Exemple : Résoudre $2x^2 - 8x + 3 = 0$.

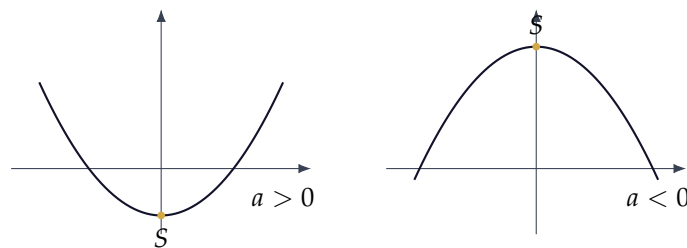
$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 64 - 24 = 40 > 0$: deux solutions.

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{40}}{4} = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{40}}{4} = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$$

3 Variations et représentation graphique de $x \mapsto ax^2 + bx + c$

Propriété

La représentation graphique de $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une **parabole** de sommet $S(\alpha; \beta)$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette parabole admet la droite verticale d'équation $x = \alpha$ comme **axe de symétrie**.



Propriété

Les variations de f se déduisent du signe de a et de la position du sommet :

- si $a > 0$: f est **décroissante** sur $] -\infty; \alpha]$ puis **croissante** sur $[\alpha; +\infty[$ — f admet un **minimum** β en α .
- si $a < 0$: f est **croissante** sur $] -\infty; \alpha]$ puis **décroissante** sur $[\alpha; +\infty[$ — f admet un **maximum** β en α .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	β	$+\infty$

$a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$

$a < 0$

Méthode

Exemple : Pour $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ (forme canonique $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$) : comme $a = 2 > 0$, f est décroissante sur $] -\infty; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$, et admet un minimum égal à -5 atteint en $x = 2$.

4 Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) de discriminant Δ .

- si $\Delta > 0$, avec $x_1 < x_2$ les deux racines : $f(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines, et du signe de $-a$ entre les racines.

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	signe de a

Propriété

- si $\Delta = 0$, avec x_0 la racine double : $f(x)$ est du signe de a partout, sauf en x_0 où $f(x_0) = 0$.
- si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout réel x (pas de racine).

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	

Méthode

Exemple : Signe de $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$: on a vu $\Delta = 40 > 0$ et $a = 2 > 0$, avec $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ et $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$.

$$f(x) \geq 0 \text{ sur }]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[\quad f(x) < 0 \text{ sur }]x_1; x_2[$$

À retenir

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: son signe pilote à la fois le nombre de racines, la factorisation et le signe de f .

Sommet $S(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$: il donne le minimum (si $a > 0$) ou le maximum (si $a < 0$) de f .