CORRIGÉ — ÉPREUVE ANTICIPÉE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALITÉ – PREMIÈRE

Sujet d'entraînement n°10

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 pts)

Tableau récapitulatif des réponses

Question	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Réponse	c	a	b	c	b	c	a	c	b	d	b	b

Justifications

1. Réponse c. L'intersection avec l'axe des ordonnées s'obtient pour $x = 0$: $f(0) = 2\times 0 - 8 = -8$. Le point est $(0\,;\,-8)$.

2. Réponse a. h est affine : $h(x) = mx + p$. Le coefficient directeur vaut

$$m = \frac{h(6) - h(2)}{6 - 2} = \frac{9 - 1}{4} = 2.$$

Puis $h(2) = 1 \Rightarrow 2\times 2 + p = 1 \Rightarrow p = -3$, donc $h(x) = 2x - 3$ et $h(10) = 2\times 10 - 3 = 17$.

3. Réponse b. Avec $c = 4$ et $d = -\frac{1}{4}$: $cd = 4 \times (-\frac{1}{4}) = -1$. Donc

$$Y = a + \frac{b}{cd} = \frac{1}{2} + \frac{3}{-1} = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}.$$

4. Réponse c. On isole c dans $Y = a + \dfrac{b}{cd}$:

$$Y - a = \frac{b}{cd} \implies cd = \frac{b}{Y-a} \implies c = \frac{b}{d(Y-a)} = \frac{b}{Yd - ad}.$$

5. Réponse b. En utilisant les règles sur les puissances :

$$A = \frac{7^3\times 7^4}{(7^2)^5 \times 7^{-12}} = \frac{7^7}{7^{10}\times 7^{-12}} = \frac{7^7}{7^{-2}} = 7^{7-(-2)} = 7^9.$$

6. Réponse c. Une racine carrée est définie lorsque son radicande est positif ou nul : $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$. Donc $D_g = \left[-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

7. Réponse a. On a $P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$ et $P(B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$. La formule du crible donne

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}55 = 0{,}15,$$

d'où $P(\overline{A\cap B}) = 1 - P(A\cap B) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

8. Réponse c. Sur les 30 élèves, 9 ont choisi le tennis : $\dfrac{9}{30} = 0{,}30 = 30\%$.

9. Réponse b. Comme $\dfrac{30}{9} = \dfrac{10}{3}$:

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \implies \frac{1}{3}x = \frac{12}{3} = 4 \implies x = 12.$$

10. Réponse d. Les coefficients multiplicateurs successifs sont 0,75 (baisse de 25 %) puis 1,08 (hausse de 8 %). Le coefficient global vaut $0{,}75 \times 1{,}08 = 0{,}81$, soit une évolution *globale* de -19%. Le *taux d'évolution moyen* annuel t vérifie $(1+t)^2 = 0{,}81$, donc $1 + t = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$ et $t = -0{,}10 = -10\%$.

11. Réponse b. La courbe coupe la droite d'équation $y = 2$ en -3 et 2. Et elle est située au dessus de cette droite avant -3 et après 2.
(Les autres sont fausses :$f(x) \geq 0$ sur $]-\infty;\ -2] \cup [1;\ +\infty[$, $f(0) = -1 \neq 1$ et $f(-1) = -1 \neq 0$.)

12. Réponse b. On résout graphiquement $f(x) = 2$: La courbe coupe la droite d'équation $y = 2$ en -3 et 2.
Les antécédents de 2 sont -3 et 2.

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 — Corrigé

Modèle : chaque année on ajoute d'abord 80 cétacés, puis on retire 5 %. Le coefficient multiplicateur d'une baisse de 5 % est 0,95.

1. a. On part de $u_0 = 3\,000$.

$$u_1 = 0{,}95\,(3000 + 80) = 0{,}95 \times 3080 = 2926$$

$$u_2 = 0{,}95\,(2926 + 80) = 0{,}95 \times 3006 = 2855{,}7.$$

1. b. Entre le 1er juin et le 31 octobre, l'effectif passe de u_n à $u_n + 80$. Entre le 1er novembre et le 31 mai, il subit une baisse de 5%, donc est multiplié par 0,95 :

$$u_{n+1} = 0{,}95\,(u_n + 80) = 0{,}95\,u_n + 0{,}95 \times 80 = 0{,}95\,u_n + 76.$$

1. c. *Pas arithmétique :* $u_1 - u_0 = 2926 - 3000 = -74$ tandis que $u_2 - u_1 = 2855{,}7 - 2926 = -70{,}3$. Les différences ne sont pas constantes.
Pas géométrique (admis) : $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{2926}{3000} \approx 0{,}975$ tandis que $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{2855{,}7}{2926} \approx 0{,}976$. Les quotients ne sont pas constants. La suite n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

2. a. Pour tout entier n, $v_n = u_n - 1520$. Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1520 = 0{,}95\,u_n + 76 - 1520 = 0{,}95\,u_n - 1444.$$

Or $v_n = u_n - 1520 \iff u_n = v_n + 1520$
Donc $v_{n+1} = 0{,}95(v_n + 1520) - 1444 = 0{,}95v_n + 1444 - 1444 = 0{,}95\,v_n$
(v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1520 = 3000 - 1520 = 1480$.

2. b. D'où, pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = 1480 \times 0{,}95^{\,n}$.

2. c. Comme $u_n = v_n + 1520$, on obtient

$$u_n = 1480 \times 0{,}95^{\,n} + 1520.$$

3. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = 1480\left(0{,}95^{\,n+1} - 0{,}95^{\,n}\right) = 1480 \times 0{,}95^{\,n}\,(0{,}95 - 1) = -74 \times 0{,}95^{\,n}.$$

Comme $0{,}95^{\,n} > 0$, on a $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est **strictement décroissante**.

4. a. Algorithme complété :

```python
def cetace():
    u = 3000
    n = 0
    while u >= 2000:
        n = n + 1
        u = 0.95*u + 76
    return n
```

4. b. D'après le tableau , $0{,}95^{\,n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1480 \times 0 + 1520 = 1520.$$

La suite est décroissante et tend vers $1520 < 2000$: l'effectif finira donc par passer sous le seuil de 2 000. **Oui, la réserve fermera.**

Exercice 2 — Corrigé

On rappelle $N(x) = 100\,\mathrm{e}^{-2x}$ (en millions d'unités), pour $x \in [0{,}4\,;\,2]$ (prix en milliers d'euros).

1. Un prix de 1 000 € correspond à $x = 1$:

$$N(1) = 100\,\mathrm{e}^{-2} \approx 100 \times 0{,}14 \approx 14 \text{ millions},$$

soit environ **14 000 000** smartphones vendus par trimestre.

2. La recette est $R(x) = x\,N(x) = 100x\,\mathrm{e}^{-2x}$ et le coût $C(x) = 0{,}4\,N(x) = 40\,\mathrm{e}^{-2x}$ (en milliards d'euros). Le bénéfice est $B(x) = R(x) - C(x)$. Pour $x = 1$:

$$B(1) = 100\,\mathrm{e}^{-2} - 40\,\mathrm{e}^{-2} = 60\,\mathrm{e}^{-2} \approx 60 \times 0{,}14 \approx 8{,}4.$$

Le bénéfice trimestriel est bien d'environ 8,4 milliards d'euros.

3. Pour tout $x \in [0{,}4\,;\,2]$:

$$B(x) = R(x) - C(x) = 100x\,\mathrm{e}^{-2x} - 40\,\mathrm{e}^{-2x} = (100x - 40)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

4.a. Pour tout $x \in [0{,}4\,;\,2]$:

$$B'(x) = 100 \times \mathrm{e}^{-2x} + (-2\mathrm{e}^{-2x} \times (100x - 40)$$

$$B'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \times [100 - 2(100x - 40)]$$

$$B'(x) = \mathrm{e}^{-2x} \times (180 - 200x)$$

4.b. Comme $\mathrm{e}^{-2x} > 0$ pour tout $x \in [0{,}4\,;\,2]$, le signe de $B'(x)$ est celui de $180 - 200x$:

$$180 - 200x > 0 \iff x < \frac{180}{200} = 0{,}9.$$

Donc $B'(x) > 0$ sur $[0{,}4\,;\,0{,}9[$ et $B'(x) < 0$ sur $]0{,}9\,;\,2]$: B est **croissante sur** $[0{,}4\,;\,0{,}9]$ **puis décroissante sur** $[0{,}9\,;\,2]$.

x	0,4		0,9		2
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B		$\nearrow$	$50\mathrm{e}^{-1{,}8}$	$\searrow$	

5. B atteint son maximum en $x = 0{,}9$, c'est-à-dire pour un prix de vente de **900 €**. Le bénéfice maximal vaut

$$B(0{,}9) = (100 \times 0{,}9 - 40)\,\mathrm{e}^{-1{,}8} = 50\,\mathrm{e}^{-1{,}8} \approx 50 \times 0{,}17 \approx 8{,}5 \text{ milliards d'euros.}$$

Exercice 3 — Corrigé

On travaille dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ avec $O(0\,;0)$, $A(4\,;0)$ et $B(1\,;1)$.

1. *Médiatrice de* $[OA]$.

Le milieu I de $[OA]$ a pour coordonnées :

$$x_I = \frac{x_O + x_A}{2} = \frac{0+4}{2} = 2, \qquad y_I = \frac{y_O + y_A}{2} = \frac{0+0}{2} = 0,$$

donc $I(2\,;0)$. Le segment $[OA]$ est porté par l'axe des abscisses (vecteur $\vec{i}$) : il est horizontal. Sa médiatrice est donc la droite verticale passant par I, d'équation

$$\boxed{x = 2}.$$

Médiatrice de $[OB]$.

Le milieu J de $[OB]$ a pour coordonnées :

$$x_J = \frac{x_O + x_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad y_J = \frac{y_O + y_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},$$

donc $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$. On calcule le vecteur

$$\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B - x_O \\ y_B - y_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La médiatrice de $[OB]$ est perpendiculaire à $[OB]$: le vecteur $\overrightarrow{OB}$ en est donc un **vecteur normal**.

Rappel : si une droite admet pour vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$, alors elle possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$.

Ici $\vec{n} = \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $a = 1$ et $b = 1$: l'équation est de la forme

$$x + y + c = 0.$$

Le milieu $J\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ appartient à la médiatrice, donc ses coordonnées vérifient cette équation :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 0 \implies 1 + c = 0 \implies c = -1.$$

La médiatrice de $[OB]$ a donc pour équation cartésienne

$$\boxed{x + y - 1 = 0}.$$

2. Le point M, intersection des deux médiatrices, a des coordonnées qui vérifient simultanément les deux équations. On résout le système par équivalences successives :

$$\begin{cases} x = 2 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ 2 + y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Le point d'intersection des deux médiatrices est donc

$$\boxed{M(2\,;-1)}.$$

3. Le rayon est $R = OM = \sqrt{(2-0)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Le cercle $\mathcal{C}$ circonscrit a pour équation

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2 = OM^2$$

$$\boxed{(x-2)^2+(y+1)^2 = 5}$$

Vérification : $A(4\,;\,0)$: $(4-2)^2+(0+1)^2 = 4+1 = 5$; $B(1\,;\,1)$: $(1-2)^2+(1+1)^2 = 1+4 = 5$. Les trois sommets sont bien sur $\mathcal{C}$.

4. L'axe des ordonnées a pour équation $x = 0$. On remplace dans l'équation du cercle :

$$(0-2)^2+(y+1)^2 = 5 \Rightarrow 4+(y+1)^2 = 5 \Rightarrow (y+1)^2 = 1 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = -2.$$

La valeur $y = 0$ redonne O ; donc $A'(0\,;\,-2)$.

5. La tangente à un cercle en un point est perpendiculaire au rayon en ce point. On calcule

$$\vec{MA} = (4-2\,;\,0-(-1)) = (2\,;\,1), \qquad \vec{MA'} = (0-2\,;\,-2-(-1)) = (-2\,;\,-1) = -\vec{MA}.$$

Les vecteurs $\vec{MA}$ et $\vec{MA'}$ sont colinéaires : A, M et A' sont alignés, donc $[AA']$ est un **diamètre** de $\mathcal{C}$. Les tangentes en A et en A' sont toutes deux perpendiculaires à cette même direction $(2\,;\,1)$: elles sont donc **parallèles**.

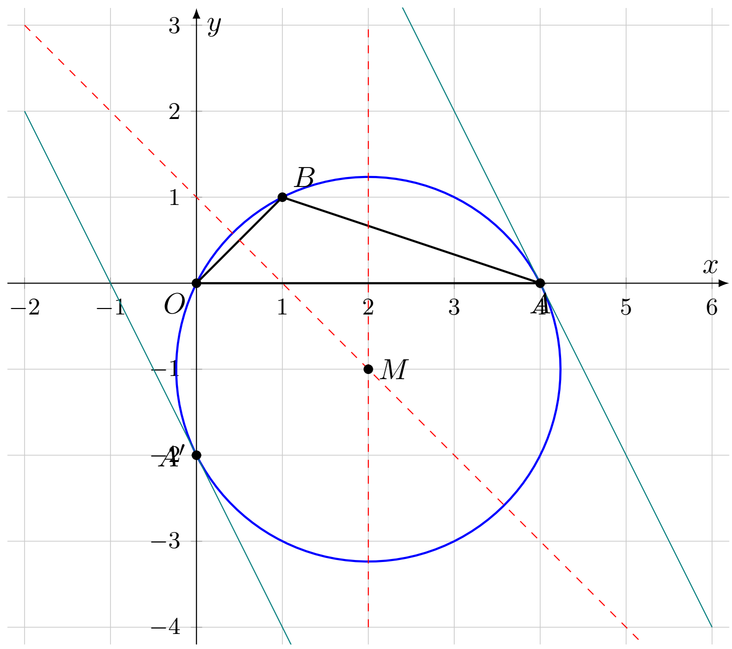
Équations des tangentes (normale $\vec{n} = (2\,;\,1)$) :

$$\text{en } A :\ 2(x-4)+1(y-0) = 0 \ \Rightarrow\ 2x+y-8 = 0,$$

$$\text{en } A' :\ 2(x-0)+1(y+2) = 0 \ \Rightarrow\ 2x+y+2 = 0.$$

Même vecteur normal $\Rightarrow$ droites parallèles.

6. *Figure.*



En bleu : le cercle circonscrit $\mathcal{C}$. En rouge pointillé : les deux médiatrices. En vert : les deux tangentes parallèles en A et A'.