ÉPREUVE ANTICIPÉE DE MATHÉMATIQUES – SPÉCIALITÉ – PREMIÈRE

Sujet d'entraînement n°9

2 heures – Calculatrice non autorisée

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM (6 pts)
COMMUNE A TOUS LES CANDIDATS

Pour cette première partie, **aucune justification n'est demandée** et une seule réponse est possible par question. Pour chaque question, reportez son numéro sur votre copie et indiquez votre réponse.

1. Soit la fonction affine $f(x) = 2x - 8$. Les coordonnées du point d'intersection de C_f avec l'axe des ordonnées sont :

a. $(0;\ 2)$ b. $(-8;\ 0)$ c. $(0;\ -8)$ d. $(-2;\ 0)$

2. h est une fonction affine telle que $h(2) = 1$ et $h(6) = 9$.
L'image de 10 par h est égale à :

a. 17 b. 70 c. 20 d. 5

3. On considère la relation $Y = a + \dfrac{b}{cd}$. Pour $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$ et $d = -\dfrac{1}{4}$:

a. $Y = \dfrac{3}{2}$ b. $Y = -\dfrac{5}{2}$ c. $Y = -\dfrac{3}{2}$ d. $Y = \dfrac{5}{2}$

4. On considère la relation $Y = a + \dfrac{b}{cd}$.

a. $a = \dfrac{cdY}{b}$ b. $b = \dfrac{Y-a}{cd}$ c. $c = \dfrac{b}{Yd - ad}$ d. $d = \dfrac{Yb - ab}{c}$

5. On considère $A = \dfrac{7^3 \times 7^4}{(7^2)^5 \times 7^{-12}}$

a. $A = 7^5$ b. $A = 7^9$ c. $A = 7^{12}$ d. $A = 7^{13}$

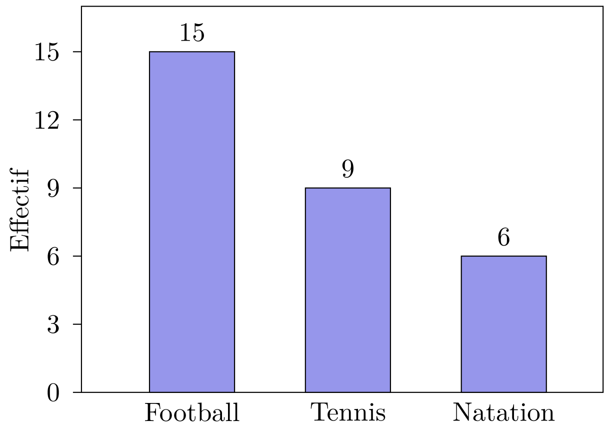
6. Soit la fonction $g(x) = \sqrt{3x+1}$. L'ensemble de définition de la fonction g est : :

a. $D_g = \left]-\frac{1}{3};\ +\infty\right[$ b. $D_g = \left]-\infty;\ -\frac{1}{3}\right]$ c. $D_g = \left[-\frac{1}{3};\ +\infty\right[$ d. $D_g = \left]-\infty;\ -\frac{1}{3}\right[$

7. On sait que $P(\bar{A}) = 0,6$, $P(\bar{B}) = 0,7$ et $P(A \cup B) = 0,55$. Combien vaut $P(\overline{A \cap B})$?

a. 0,85 b. 0,15 c. 0,25 d. 0,75

8. On a demandé à 30 élèves d'un lycée quel était leur sport préféré. Les résultats sont représentés dans le diagramme en barre ci-dessous :



La proportion d'élèves ayant choisi le **tennis** est :

a. 20%   b. 45%   c. 30%   d. 9%

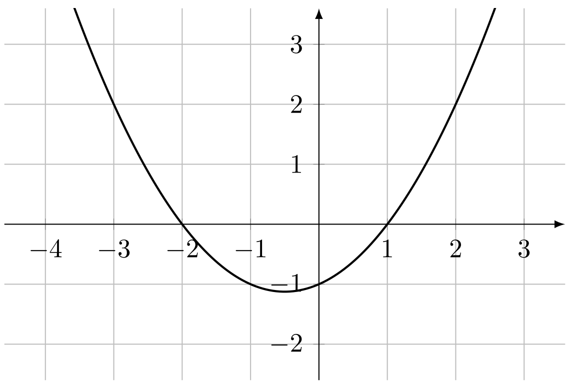
9. L'équation $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{30}{9}$ a pour solution :

a. $\frac{4}{3}$ b. 12   c. $\frac{4}{9}$ d. 8

10. En 2021, le cours d'une action en bourse a subi une baisse de 25% avant d'augmenter à nouveau en 2022 de 8%. Quel est le pourcentage moyen d'évolution sur ces deux années ?

a. -19% b. -15% c. -11% d. -10%

11. D'après le graphique suivant représentant la courbe d'une fonction f :



a. $f(x) \geq 0$ sur $]1;\ +\infty[$ b. $f(x) \geq 2$ sur $]-\infty;\ -3] \cup [2;\ +\infty[$

c. $f(0) = 1$ d. $f(-1) = 0$

12. D'après le même graphique donner le ou les antécédents de 2 par la fonction f :

a. 2   b. -3 et 2   c. -2et 2   d. 0

DEUXIÈME PARTIE. (14 pts)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques

Exercice 1

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2025. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2025+n$. On a donc $u_0 = 3\,000$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Justifier brièvement que, pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} = 0{,}95\,u_n + 76.$$
   (c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas arithmétique. On admet qu'elle n'est pas géométrique.
2. On désigne par (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 1520$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
   (b) Donner la forme explicite de (v_n) pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 1480 \times 0{,}95^{\,n} + 1520.$$
3. Déterminer, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).
4. (a) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000 :

```
def cetace():
    u = 3000
    n = 0
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

   (b) Conjecturer la limite de la suite (u_n). La réserve marine fermera-t-elle un jour ?

$0{,}95^{10}$	$0{,}95^{25}$	$0{,}95^{50}$	$0{,}95^{75}$	$0{,}95^{100}$	$0{,}95^{125}$
0,60	0,28	0,08	0,02	0,006	0,002

Exercice 2 : Smartphones « haut de gamme »

Une entreprise vend des smartphones d'un seul modèle « haut de gamme ».

Le service marketing modélise le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par trimestre en fonction du prix de vente x par la fonction N définie par

$$N(x) = 100\,\mathrm{e}^{-2x}$$

où :

- x est le prix de vente en milliers d'euros d'un smartphone modèle « haut de gamme ». Le prix du smartphone modèle « haut de gamme » est compris entre 400 € et 2 000 €. On a donc $x \in [0{,}4\,;\,2]$;
- $N(x)$ est le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus trimestriellement en millions d'unités.

1. Si le service commercial fixe le prix de vente de ce smartphone modèle « haut de gamme » à 1 000 €, quel sera le nombre de smartphones vendus trimestriellement ? On arrondira le résultat au million d'unités.

La recette trimestrielle $R(x)$ est obtenue en multipliant le nombre de smartphones modèle « haut de gamme » vendus par le prix de vente. On obtient $R(x) = x \times N(x)$ en milliards d'euros.

Le coût de production en milliards d'euros en fonction du nombre de smartphones modèle « haut de gamme » fabriqués est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0{,}4 \times N(x)$ où x est le prix de vente en milliers d'euros.

Le bénéfice est obtenu en calculant la différence entre la recette et le coût de production.

2. Vérifier que le bénéfice trimestriel peut être estimé à 8,4 milliards d'euros pour un prix de vente à 1 000 €.

3. Montrer que le bénéfice trimestriel s'exprime en milliards d'euros en fonction du prix de vente x en milliers d'euros par :

$$B(x) = (100x - 40)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

4.a. Montrer que, pour tout réel $x \in [0{,}4\,;\,2]$,

$$B'(x) = (180 - 200x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

4.b. Étudier les variations de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}4\,;\,2]$.

5. À quel prix faut-il vendre ces smartphones pour assurer un bénéfice maximal ?

Tableau de valeurs (valeurs approchées de e^{-a} au centième) :

$a = 1$	$a = 1{,}2$	$a = 1{,}4$	$a = 1{,}6$	$a = 1{,}8$	$a = 2$
0,37	0,30	0,25	0,20	0,17	0,14

Exercice 3 : Triangle et cercle circonscrit

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère le triangle OAB avec $A(4;0)$ et $B(1;1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[OA]$ et une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[OB]$.
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection M des deux médiatrices.
3. Déterminer une équation du cercle C circonscrit au triangle OAB.
4. Calculer les coordonnées du point A' $(\neq O)$, intersection du cercle avec l'axe des ordonnées.
5. Montrer que les tangentes au cercle en A et A' sont parallèles.
6. Faire une figure.