**$\sim$ Baccalauréat Première Spécialité Mathématiques $\sim$**
**Sujet d'entraînement n°8 — Corrigé**

## Partie I — Automatismes QCM

**Tableau récapitulatif des réponses**

| **Question** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Réponse** | b | a | a | b | c | c | c | a | c | a |

**Justifications**

**1. b.** Les coefficients multiplicateurs sont 0,90 et 0,80, donc le coefficient global vaut $0{,}90 \times 0{,}80 = 0{,}72$, soit une baisse globale de $1 - 0{,}72 = 0{,}28 = 28\,\%$.

**2. a.** $\dfrac{7}{4} = 1{,}75$, donc $\dfrac{7}{4} \times 10^{-3} = 1{,}75 \times 10^{-3} = 0{,}00175$.

**3. a.** $1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{9}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$ (déjà irréductible).

**4. b.** D'après le diagramme en boîtes, $Q_1 = 15$ et $Q_3 = 45$. L'écart interquartile vaut $Q_3 - Q_1 = 45 - 15 = 30$.

**5. c.** Sur le diagramme, 30 est la médiane et 60 le maximum. Entre la médiane et le maximum se trouvent, par définition, 50 % des valeurs de la série.

**6. c.** $3x - 10 = x + 2 \iff 3x - x = 2 + 10 \iff 2x = 12 \iff x = 6$.

**7. c.** $(3x - 2)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 - 12x + 4$.

**8. a.** $x^3 + 5x = x\left(x^2 + 5\right)$ (on factorise par $x$).

**9. c.** La droite coupe l'axe des ordonnées en 3 (ordonnée à l'origine) et passe par $(0\,;\,3)$ et $(1\,;\,1)$ : son coefficient directeur est $\dfrac{1-3}{1-0} = -2$. Donc $\Delta : y = -2x + 3$.

**10. a.** Le coefficient directeur de $(AB)$ vaut $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-8}{1-5} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

## Exercice 1 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM) ; pour chaque question, une seule des quatre propositions est correcte.

**Question 1**
On lance deux fois une pièce équilibrée. 2 Faces : $-5$ € ; exactement une Face : $+2$ € ; 2 Piles : $+4$ €. $G$ est le gain algébrique.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** $E(G) = 0{,}75$ | b. $E(G) = 3$ | c. $E(G) = 1$ | d. $E(G) = -4$ |

On dresse l'arbre pondéré : chaque lancer donne Face ou Pile avec probabilité $\frac{1}{2}$, d'où quatre issues équiprobables de probabilité $\frac{1}{4}$.

| Tirage | FF | FP | PF | PP |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $G$ | $-5$ | $+2$ | $+2$ | $+4$ |

$$E(G) = \tfrac{1}{4}(-5) + \tfrac{1}{4}(2) + \tfrac{1}{4}(2) + \tfrac{1}{4}(4) = \tfrac{1}{4}(-5+2+2+4) = \tfrac{3}{4} = 0{,}75.$$

**Question 2**
$P(A) = \frac{3}{7}$, $P(B) = \frac{3}{20}$, $P(A \cup B) = \frac{4}{7}$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. indépendants | b. $P_A(B) = \frac{3}{980}$ | c. $P(A \cap B) = \frac{1}{140}$ | **d.** $P_A(B) = \frac{1}{60}$ |

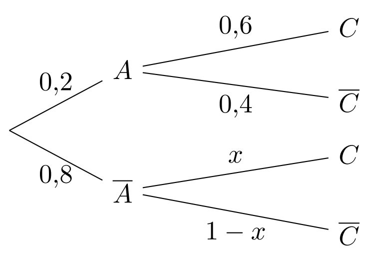
On a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, donc

$$P(A \cap B) = \frac{3}{7} + \frac{3}{20} - \frac{4}{7} = \frac{3}{20} - \frac{1}{7} = \frac{21}{140} - \frac{20}{140} = \frac{1}{140}.$$

Comme $P(A) \times P(B) = \dfrac{9}{140} \neq P(A \cap B) = \dfrac{1}{140}$, les évènements ne sont pas indépendants. Enfin

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{140}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{140} \times \frac{7}{3} = \frac{1}{60}.$$

**Question 3**
Arbre pondéré avec $P(A) = 0{,}2$, $P_A(C) = 0{,}6$, $P_{\overline{A}}(C) = x$, et $P(C) = 0{,}48$.



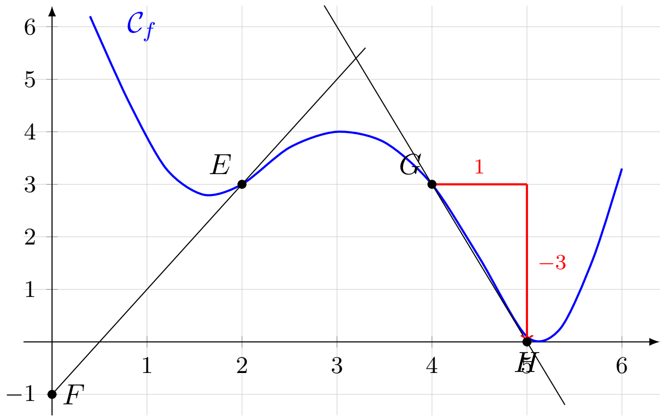

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $x = 0{,}6$ | b. $x = 0{,}36$ | **c.** $x = 0{,}45$ | d. $x = \frac{0{,}48}{0{,}12}$ |

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(C) = P(A \cap C) + P(\overline{A} \cap C) = 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}8\,x = 0{,}48,$$

soit $0{,}12 + 0{,}8x = 0{,}48$, donc $0{,}8x = 0{,}36$ et $x = \dfrac{0{,}36}{0{,}8} = \dfrac{36}{80} = \dfrac{9}{20} = 0{,}45$.

**Question 4**
Tangente $(EF)$ en $E(2\,;\,3)$ et tangente $(GH)$ en $G(4\,;\,3)$, avec $F(0\,;\,-1)$ et $H(5\,;\,0)$, lus graphiquement.




| | | | |
|---|---|---|---|
| a. $f'(2) = 4$ | b. $f'(2) = 3$ | c. $f'(4) = 3$ | **d.** $f'(4) = -3$ |

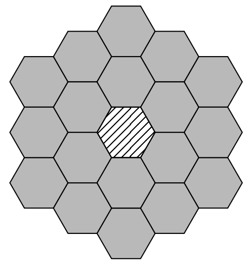
$f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente $(GH)$ : en avançant de 1 en abscisse, on descend de 3 en ordonnée (segment rouge), donc $f'(4) = -3$.

**Question 5**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** `evolu(500)=4` | b. `evolu(600)=5` | c. `evolu(300)=3` | d. `evolu(400)=4` |

On part de $i = 200$, $n = 0$, et tant que $i < k$ on remplace $i$ par $1{,}2\,i + 10$ : $i_0 = 200 \to 250 \to 310 \to 382 \to 468{,}4 \to \dots$ En suivant les valeurs, on obtient `evolu(500)` : 200, 250, 310, 382, 468,4, 572,08 ; la boucle s'arrête au 4$^{\text{e}}$ passage dès que $i \geq 500$, et renvoie $n = 4$.

## Exercice 2 — 5 points



L'artisan pose un carreau central, puis l'entoure d'anneaux successifs de carreaux hexagonaux. $u_n$ est le nombre de carreaux ajoutés à l'étape $n$, avec $u_1 = 6$ et $u_2 = 12$.

**1.** On a $u_3 = 18$.

**2.** La suite est arithmétique de raison 6 et de premier terme $u_1 = 6$, donc $u_n = 6 + 6(n-1) = 6n$.

**3.** À l'étape 5, l'artisan ajoute $u_5 = 6 \times 5 = 30$ carreaux. En comptant le carreau central, le total posé à la fin de l'étape 5 est

$$1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 1 + 6 + 12 + 18 + 24 + 30 = 91 \text{ carreaux.}$$

**4.** En factorisant par 6 :

$$S_n = u_1 + \cdots + u_n = 6 \times 1 + 6 \times 2 + \cdots + 6 \times n = 6\,(1 + 2 + 3 + \cdots + n).$$

En posant $T_n = 1+2+\cdots+n$ et en sommant terme à terme $T_n$ écrite dans les deux sens, $2T_n = n(n+1)$, donc $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et

$$S_n = 6 \times \frac{n(n+1)}{2} = 3n(n+1) = 3n^2 + 3n.$$

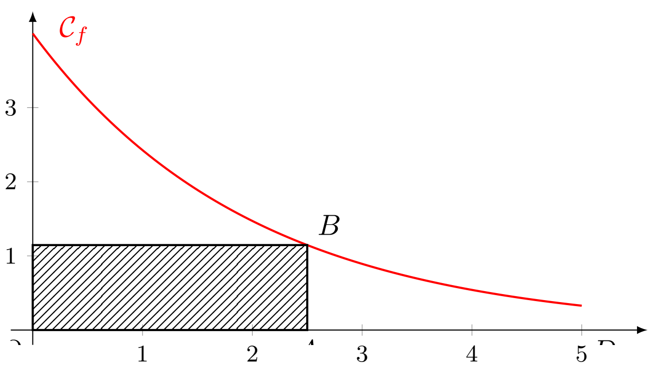
**5.** Avec le carreau central, le total à l'étape $n$ est $3n^2 + 3n + 1$. On résout $3n^2 + 3n + 1 = 2977$, soit $3n^2 + 3n - 2976 = 0$.

$\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times (-2976) = 9 + 35712 = 35721 = 189^2$, $\quad n_1 = \dfrac{-3+189}{6} = 31$, $\quad n_2 = \dfrac{-3-189}{6} = -32$.

Seule la solution positive convient : l'artisan a fait **31 étapes**.

## Exercice 3 — 5 points

$f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0,5x}$ sur $[0\,;\,5]$. Le rectangle $OABC$ a pour sommets $O$, $A(x\,;\,0)$, $B\big(x\,;\,f(x)\big)$ et $C\big(0\,;\,f(x)\big)$.




**1.** Pour $x \in [0\,;\,5]$, $OA = x$ et $OC = f(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0,5x}$. L'aire du rectangle est donc

$$g(x) = \mathcal{A}(OABC) = x \times f(x) = 4x\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

**2.** $g$ est un produit ; avec $(\mathrm{e}^{-0,5x})' = -0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x}$ :

$$g'(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0,5x} + 4x \times (-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = 4\,\mathrm{e}^{-0,5x} - 2x\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (4 - 2x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}.$$

**3.** Comme $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $4 - 2x$ : positif pour $x < 2$, négatif pour $x > 2$. D'où le tableau de variations :

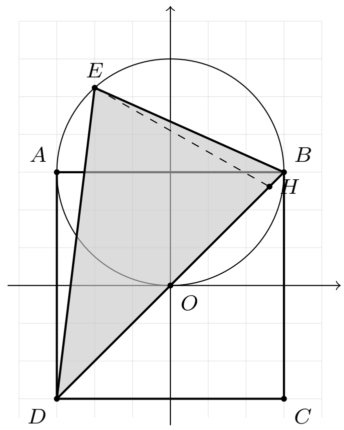
| $x$ | 0 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g$ | 0 | $\nearrow$ | $8\mathrm{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $20\mathrm{e}^{-2,5}$ |

**4.** $g$ est maximale pour $x = 2$ : on place donc $A$ au point d'abscisse 2 (soit $OA = 2$ m). La superficie maximale est

$$g(2) = 8\,\mathrm{e}^{-1} \approx 8 \times 0{,}37 \approx 2{,}96 \text{ m}^2, \quad \text{soit } \mathbf{2{,}96 \text{ m}^2} \text{ au dm}^2 \text{ près.}$$

## Exercice 4 5 points

Carré $ABCD$ : $A(-3\,;\,3)$, $B(3\,;\,3)$, $C(3\,;\,-3)$, $D(-3\,;\,-3)$ ; cercle de diamètre $[AB]$ ; $E\big(-2\,;\,3+\sqrt{5}\big)$ sur ce cercle ; $I$ milieu de $[AB]$.




**1.** *Droite* $(BD)$. $B(3\,;\,3)$ et $D(-3\,;\,-3)$ ont des coordonnées égales (de la forme $(t\,;\,t)$) : une équation de $(BD)$ est $y=x$, soit $x-y=0$.

*Cercle de diamètre* $[AB]$. Son centre est $I(0\,;\,3)$, milieu de $[AB]$, et son rayon $\dfrac{AB}{2}=3$. Pour $M(x\,;\,y)$ :

$$M\in\mathcal{C}\iff IM^2=3^2\iff x^2+(y-3)^2=9\iff x^2+y^2-6y=0.$$

**2.** La hauteur issue de $E$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{DB}=0$. Avec $\overrightarrow{EM}\big(x+2\,;\,y-3-\sqrt{5}\big)$ et $\overrightarrow{DB}(6\,;\,6)$ :

$$\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{DB}=6(x+2)+6\big(y-3-\sqrt{5}\big)=0\iff x+y-\big(1+\sqrt{5}\big)=0.$$

**3.** $H$ est l'intersection de la hauteur $(EH)$ et de $(BD)$ ; ses coordonnées vérifient

$$\begin{cases}x+y-(1+\sqrt{5})=0\\ -x+y=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\ 2y=1+\sqrt{5},\quad y=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et puisque $x=y$ :

$$H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

**4.** On a $BD=6\sqrt{2}$ (diagonale du carré de côté 6). De plus

$$\overrightarrow{EH}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}-3-\sqrt{5}\right)=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{-5}{2}\right),$$

$$EH^2=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{-5}{2}\right)^2=\frac{25+5+10\sqrt{5}+25}{4}=\frac{55+10\sqrt{5}}{4},\quad EH=\frac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}.$$

D'où l'aire :

$$\mathcal{A}(BDE)=\frac{BD\times EH}{2}=\frac{6\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\,\sqrt{55+10\sqrt{5}}}{2}\approx 18{,}7\text{ u.a.}$$

**5.** Comme $H$ est le projeté orthogonal de $E$ sur $(BD)$, $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DH}$. Avec $\overrightarrow{DH}\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$, on a $DH=\frac{7+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2}$, et donc

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}=6\sqrt{2}\times\frac{7+\sqrt{5}}{2}\sqrt{2}=6\big(7+\sqrt{5}\big)=42+6\sqrt{5}.$$

Or $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE}=\left\|\overrightarrow{DB}\right\|\,\left\|\overrightarrow{DE}\right\|\cos\widehat{BDE}$, avec $\left\|\overrightarrow{DB}\right\|=6\sqrt{2}$ et $\left\|\overrightarrow{DE}\right\|=\sqrt{42+12\sqrt{5}}$ :

$$\cos\widehat{BDE}=\frac{42+6\sqrt{5}}{6\sqrt{2}\times\sqrt{42+12\sqrt{5}}}.$$