

Première Partie — QCM

(14 pts)

RAPPEL DE COURS

Les justifications ci-dessous n'étaient pas demandées sur la copie. On présente ici le raisonnement complet pour chaque question.

Question 1

Si $\frac{y}{x} = z + t$, on multiplie les deux membres par x (qui est non nul) :

$$y = x(z + t) = xz + xt$$

RÉPONSE

Réponse A. $y = xz + xt$.

Vérification des autres réponses : B implique $x = y/z + y/t = y(1/z + 1/t)$, ce qui ne correspond pas à la relation de départ. C et D sont également fausses par vérification directe.

Question 2

On calcule le coefficient multiplicateur global des deux transformations successives :

$$\underbrace{0,70}_{\text{réduction 30 \%}} \times \underbrace{1,50}_{\text{augmentation 50 \%}} = 1,05$$

Ce coefficient vaut $1,05 > 1$, ce qui correspond à une augmentation de 5 %.

RÉPONSE

Réponse C.

Question 3

Si 174 élèves représentent 30 % du total, le nombre total d'élèves de seconde est :

$$\frac{174}{0,30} = \frac{174}{3} \times 10 = 580$$

RÉPONSE

Réponse C. Le lycée compte 580 élèves de seconde.

Question 4

$$N = \frac{10^7}{2^3} = \frac{10^7}{8} = \frac{10^7}{8} = \frac{10 \times 10^6}{8} = 1,25 \times 10^6$$

RÉPONSE

Réponse A. $N = 1,25 \times 10^6$.

Question 5

Le volume du pavé original est $V = 15 \times 30 \times 60 = 27\,000 \text{ cm}^3$.

RAPPEL DE COURS

Lors d'une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , donc le volume est multiplié par k^3 .

Le rapport est $k = \frac{1}{3}$, donc le facteur d'homothétie sur le volume est $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$:

$$V_{\text{réduit}} = 27\,000 \times \frac{1}{27} = 1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3$$

RÉPONSE

Réponse A. Le volume du pavé réduit est de 1 dm^3 .

Question 6

On simule l'exécution de suite(4) pas à pas. La boucle tourne 4 fois (pour i valant 0, 1, 2, 3) :

| Itération i | Calcul | Valeur de u |
|----------------|-------------------|---------------|
| Initialisation | – | 7 |
| $i = 0$ | $2 \times 7 - 1$ | 13 |
| $i = 1$ | $2 \times 13 - 1$ | 25 |
| $i = 2$ | $2 \times 25 - 1$ | 49 |
| $i = 3$ | $2 \times 49 - 1$ | 97 |

RÉPONSE

Réponse C. suite(4) affiche 97.

Question 7

Une voiture citadine électrique correspond à l'événement $\bar{U} \cap E$ (non utilitaire et électrique). On lit directement dans le tableau : $P(\bar{U} \cap E) = 0,4 = 40\%$.

RÉPONSE

Réponse B. $P(\bar{U} \cap E) = 40\%$.

Question 8

La probabilité conditionnelle de E sachant U est :

$$P_U(E) = \frac{P(U \cap E)}{P(U)} = \frac{0,24}{0,4} = \frac{24}{40} = 0,6$$

RÉPONSE

Réponse C. $P_U(E) = 0,6$.

Question 9

RAPPEL DE COURS

Deux événements U et E sont indépendants si et seulement si $P(U \cap E) = P(U) \times P(E)$.

On vérifie : $P(U) \times P(E) = 0,4 \times 0,64 = 0,256$.

Or $P(U \cap E) = 0,24 \neq 0,256$, donc U et E ne sont pas indépendants.

RÉPONSE

Réponse C. U et E ne sont pas indépendants.

L'affirmation A est fausse car $P(U \cap E) \neq P(U) \times P(E)$.

Question 10

On résout $x^2 > 16$ sur \mathbb{R} :

$$x^2 > 16 \iff x^2 - 16 > 0 \iff (x - 4)(x + 4) > 0$$

Ce produit est positif quand les deux facteurs sont de même signe :

- $x < -4$: $(x - 4) < 0$ et $(x + 4) < 0 \Rightarrow$ produit > 0 ;
- $x > 4$: $(x - 4) > 0$ et $(x + 4) > 0 \Rightarrow$ produit > 0 .

RÉPONSE

Réponse B. $S =]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[.$

Question 11

Le coefficient directeur de la droite passant par $E(0; 3)$ et $F(4; 1)$ est :

$$m = \frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = \frac{1 - 3}{4 - 0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

RÉPONSE

Réponse A. $m = -\frac{1}{2}.$

Question 12

La droite (d) passe par $E(0; 3)$ avec un coefficient directeur $m = -\frac{1}{2}$. On lit directement l'ordonnée à l'origine : $b = 3$. Donc son équation est :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

Elle coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2}x + 3 \implies x = 6$$

RÉPONSE

Réponse D. La droite coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 6.

Deuxième Partie — Exercice 1

(6 pts)

Partie A — Étude de la fonction polynôme P On rappelle que $P(x) = x^3 - 3x^2 - 16$.Question 1 — Tableau de variations de P On calcule la dérivée de P : P est dérivable sur \mathbb{R} comme polynôme.

$$P'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

On résout $P'(x) = 0$: $3x(x - 2) = 0$, ce qui donne $x = 0$ ou $x = 2$.Signe de $P'(x)$: le facteur $3 > 0$, donc le signe de P' , polynôme du second degré, est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre.

On calcule les valeurs remarquables :

$$P(0) = 0 - 0 - 16 = -16 \quad P(2) = 8 - 12 - 16 = -20$$

RÉPONSE

| | | | | | |
|---------|-----------|-----|---|-----------|---|
| x | $-\infty$ | 0 | 2 | $+\infty$ | |
| $P'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $P(x)$ | | -16 | | -20 | |

 P admet un maximum local en 0 (valant -16) et un minimum local en 2 (valant -20).Question 2 — Calcul de $P(4)$

$$P(4) = 4^3 - 3 \times 4^2 - 16 = 64 - 48 - 16 = 0$$

RÉPONSE

 $P(4) = 0$. Donc $x = 4$ est une racine de P .Question 3 — Tableau de signes de P

MÉTHODE

Grâce au tableau de variations, on sait que le maximum de P vaut $-16 < 0$ sur $]-\infty; 2]$. Comme P reste négatif sur cet intervalle et croît ensuite vers $+\infty$, P ne peut s'annuler qu'une seule fois, et on vient de calculer que c'est en $x = 4$.En effet, le tableau de variations montre que sur \mathbb{R} :

- Le maximum local est $P(0) = -16 < 0$: la courbe ne passe jamais au-dessus de l'axe pour $x \leq 2$.
- P est strictement croissante sur $[2; +\infty[$ en partant de -20 et allant vers $+\infty$, donc P s'annule exactement une fois sur cet intervalle : en $x = 4$.

RÉPONSE

| | | | |
|--------|-----------|-----|-----------|
| x | $-\infty$ | 4 | $+\infty$ |
| $P(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

$P(x) < 0$ pour $x < 4$, $P(4) = 0$, $P(x) > 0$ pour $x > 4$.

Partie B — Étude de la fonction rationnelle f

On rappelle que $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 32}{x}$, définie sur $]0; +\infty[$.

Question 1 — Démonstration de $f'(x) = \frac{2P(x)}{x^2}$

MÉTHODE

On simplifie d'abord $f(x)$ en divisant chaque terme par x , puis on dérive terme à terme.

Pour tout $x > 0$, f est dérivable comme quotient de polynôme dont le dénominateur est non nul.

$$f'(x) = \frac{x \times (3x^2 - 6x) - 1 \times (x^3 - 6x^2 + 32)}{x^2} = \frac{3x^3 - 12x^2 - x^3 + 6x^2 - 32}{x^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 32}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^3 - 3x^2 - 16)}{x^2}$$

RÉPONSE

On reconnaît $P(x) = x^3 - 3x^2 - 16$, donc :

$$f'(x) = \frac{2P(x)}{x^2}$$

Question 2 — Tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$

Signe de $f'(x)$: Pour $x > 0$, le dénominateur $x^2 > 0$ et le facteur $2 > 0$. Donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $P(x)$.

D'après la partie A :

- Sur $]0; 4[$: $P(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ (f est décroissante).
- En $x = 4$: $P(4) = 0$ donc $f'(4) = 0$.
- Sur $]4; +\infty[$: $P(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ (f est croissante).

On calcule $f(4)$:

$$f(4) = \frac{64 - 96 + 32}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

RÉPONSE

| | | | | |
|---------|---|---|-----------|---|
| x | 0 | 4 | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | | |

Question 3 — Minimum de f sur $]0; +\infty[$

D'après le tableau de variations, f décroît puis croît sur $]0; +\infty[$, ce qui signifie que le point $x = 4$ est un minimum global.

RÉPONSE

Le minimum de f sur $]0; +\infty[$ est $f(4) = 0$, atteint en $x = 4$.

Question 4 — Tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 4

RAPPEL DE COURS

L'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

On a $f(4) = 0$ et $f'(4) = 0$ (car $P(4) = 0$). Donc :

$$y = 0 \times (x - 4) + 0 = 0$$

RÉPONSE

L'équation de la tangente T en $x = 4$ est $y = 0$ (c'est l'axe des abscisses). Ce résultat est cohérent : le point $(4; 0)$ est un minimum, donc la tangente y est horizontale.

Deuxième Partie — Exercice 2

(5 pts)

L'urne contient 10 boules : 1 rose, 3 vertes, 6 bleues.

Question 1 — Valeurs de la variable aléatoire X

Le joueur mise 2 €. On détermine le gain algébrique (= bénéfice net incluant la mise) :

- Boule rose : le joueur reçoit 10 €, mais a misé 2 €, donc $X = 10 - 2 = 8$ €.
- Boule verte : le joueur ne gagne ni ne perd rien mais a misé 2 € donc $X = -2$ €.
- Boule bleue : le joueur perd 1 € mais a misé 2 € donc $X = -3$ €.

RÉPONSE

X peut prendre les valeurs -3 €, -2 € et 8 €.

Question 2 — Loi de probabilité de X

Les probabilités sont proportionnelles au nombre de boules de chaque couleur :

$$P(X = 8) = \frac{1}{10} \quad P(X = -2) = \frac{3}{10} \quad P(X = -3) = \frac{6}{10}$$

RÉPONSE

| | | | |
|--------------|----------------|----------------|----------------|
| x_i | -3 | -2 | 8 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Vérification : $\frac{6}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = 1 \checkmark$

Question 3 — Espérance $E(X)$ et interprétation

RAPPEL DE COURS

L'espérance d'une variable aléatoire X est : $E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i)$

$$E(X) = (-3) \times \frac{6}{10} - 2 \times \frac{3}{10} + 8 \times \frac{1}{10} = -\frac{18}{10} - \frac{6}{10} + \frac{8}{10} = \frac{-16}{10} = -1,6$$

RÉPONSE

$$E(X) = -1,6 \text{ €.}$$

Interprétation : En moyenne, le joueur perd 1,60 € par partie. Le jeu est défavorable au joueur car $E(X) < 0$. Sur un grand nombre de parties, le joueur perdra en moyenne 1,60 euro à chaque jeu.

Deuxième Partie — Exercice 3

(5 pts)

Partie A — Losange $ABCD$

On rappelle que dans un losange, les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu. On a $AC = 8$ cm et $BD = 6$ cm, donc $OA = OC = 4$ cm et $OB = OD = 3$ cm.

Question 1 — Longueur du côté du losange

Dans le triangle rectangle OAB (angle droit en O), on applique le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

RÉPONSE

$$AB = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Question 2.a — Simplification de $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$

MÉTHODE

On utilise la règle du parallélogramme pour la somme de vecteurs.

RÉPONSE

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$$

Question 2.b — Calcul de $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$

MÉTHODE

On utilise la formule normative du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\|^2 - \|\overrightarrow{DA}\|^2 - \|\overrightarrow{DC}\|^2)$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{DB}\|^2 - \|\overrightarrow{DA}\|^2 - \|\overrightarrow{DC}\|^2)$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(6^2 - 5^2 - 5^2) = \frac{-14}{2}$$

RÉPONSE

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -7.$$

Question 3 — Valeur exacte de $\cos(\widehat{CDA})$

RAPPEL DE COURS

Pour deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Ici l'angle \widehat{CDA} est l'angle en D du losange, c'est-à-dire l'angle entre \overrightarrow{DA} et \overrightarrow{DC} .

On a calculé que $\|\overrightarrow{DA}\| = \|\overrightarrow{DC}\| = 5$ (côté du losange) et $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -7$.

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \|\overrightarrow{DA}\| \times \|\overrightarrow{DC}\| \times \cos(\widehat{CDA})$$

$$-7 = 5 \times 5 \times \cos(\widehat{CDA}) = 25 \cos(\widehat{CDA})$$

RÉPONSE

$$\cos(\widehat{CDA}) = -\frac{7}{25}$$

Le cosinus est négatif, ce qui confirme que l'angle \widehat{CDA} est obtus (compris entre 90 et 180), ce qui est bien le cas dans ce losange allongé.

Partie B — Carré $ABCD$, points E et F

MÉTHODE

On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ comme suggéré. Les coordonnées des points sont simples puisque $ABCD$ est un carré de côté 1.

Coordonnées des sommets :

$$A = (0; 0) \quad B = (1; 0) \quad C = (1; 1) \quad D = (0; 1)$$

Coordonnées de E :

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_E - x_C = -\frac{3}{2} \\ y_E - y_C = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_E - 1 = -\frac{3}{2} \\ y_E - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = -\frac{1}{2} \\ y_E = 1 \end{cases}$$

$$E \left(-\frac{1}{2}; 1 \right)$$

Coordonnées de F :

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_F - x_B = 0 \\ y_F - y_B = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_F - 1 = 0 \\ y_F - 0 = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_F = 1 \\ y_F = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$F \left(1; \frac{3}{2} \right)$$

Vecteurs directeurs des droites (AF) et (BE) :

$$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 1-0 \\ \frac{3}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-1 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcul du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times \left(-\frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

RÉPONSE

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0.$$

Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs directeurs ont un produit scalaire nul. Ici $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, donc les droites (AF) et (BE) sont bien perpendiculaires.