Première Partie — QCM

(12 pts)

RAPPEL DE COURS

Pour les questions de la première partie, on présente ici la réponse correcte et une justification rapide. Il n'était pas demandé de justifier sur la copie.

Question 1

On calcule le coefficient multiplicateur global :

$$\underbrace{1{,}10}_{\text{hausse }10\,\%} \times \underbrace{0{,}70}_{\text{baisse }30\,\%} = 0{,}77$$

Soit une évolution de $0{,}77 - 1 = -0{,}23$, c'est-à-dire une baisse de 23 %.

RÉPONSE

Réponse B.

Question 2

Les femmes de la population A représentent 20 % de A, et A représente 40 % du total. La proportion cherchée est donc :

$$40\,\% \times 20\,\% = 0{,}40 \times 0{,}20 = 0{,}08 = 8\,\%$$

RÉPONSE

Réponse C.

Question 3

RAPPEL DE COURS

La variance d'une variable aléatoire est nulle si et seulement si toutes les valeurs sont identiques, c'est-à-dire que la variable ne prend qu'une seule valeur avec une probabilité égale à 1.

RÉPONSE

Réponse B.

Question 4

La pente d'une droite passant par $P(2\,;\,4)$ et $Q(5\,;\,10)$ est :

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{10-4}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$$

RÉPONSE

Réponse A.

Question 5

La fonction $g(x)$ est une composition de la forme $f(ax+b)$ avec $a = -7$ et $b = 2$. Par la règle de dérivation des fonctions composées, $g'(x) = af'(ax+b)$:

$$g'(x) = 4(-7x+2)^3 \times (-7) = -28(-7x+2)^3$$

RÉPONSE

Réponse D.

Question 6

On applique la règle de dérivation du produit $f = u \cdot v$ avec $u(x) = 3(x+1)$ et $v(x) = \sqrt{x}$:

$$u'(x) = 3 \qquad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3(x+1)}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+3x+3}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+3}{2\sqrt{x}}$$

RÉPONSE

Réponse C.

Question 7

On utilise la formule $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$:

$$P(B \cap C) = P(B) + P(C) - P(B \cup C) = 0{,}15 + 0{,}427 - 0{,}577 = 0$$

$P(B \cap C) = 0$ donc B et C sont incompatibles.
Pour l'indépendance : $P(B) \times P(C) = 0{,}15 \times 0{,}427 = 0{,}064 \neq 0 = P(B \cap C)$, donc B et C ne sont pas indépendants.

RÉPONSE

Réponse C.

Question 8

$g(x) = x^3 - 4{,}8x - 3$ donc $g'(x) = 3x^2 - 4{,}8$.

On résout $g'(x) = 0$: $3x^2 = 4{,}8$ soit $x^2 = 1{,}6$, ce qui donne $x = \pm\sqrt{1{,}6}$. Il existe donc deux extremums locaux.

RÉPONSE

Réponse D.

Question 9

k prend les valeurs 0, 1 et 2 donc 3 valeurs sont ajoutées à la liste qui en contient déjà une. On peut éliminer les propositions A et C. On fait tourner la boucle mentalement. On part de x = 1, L = [1] :

Tour	Calcul de x	Liste L
$k = 0$	$(4 \times 1 + 1)/2 = 2{,}5$	[1 ; 2,5]
$k = 1$	$(4 \times 2{,}5 + 1)/2 = 5{,}5$	[1 ; 2,5 ; 5,5]
$k = 2$	$(4 \times 5{,}5 + 1)/2 = 11{,}5$	[1 ; 2,5 ; 5,5 ; 11,5]

RÉPONSE

Réponse D. suite(3) renvoie [1 ; 2,5 ; 5,5 ; 11,5].

Question 10

On teste la colinéarité : si $\overrightarrow{v} = k\,\overrightarrow{u}$, alors $-9 = 3k \Rightarrow k = -3$ et $-6 = -2k \Rightarrow k = 3$. Les deux valeurs de k sont différentes donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

On teste l'orthogonalité : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3 \times (-9) + (-2) \times (-6) = -27 + 12 = -15 \neq 0$, donc ils ne sont pas orthogonaux non plus.

RÉPONSE

Réponse D.

Deuxième Partie — Exercice 1

(15 pts)

Question 1 — Tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$

MÉTHODE

Pour étudier le signe d'un trinôme, on le factorise soit avec des racines évidentes, soit en calculant son discriminant Δ pour trouver ses racines.

1 est une racine évidente. L'autre racine est donnée par $x_1 x_2 = \frac{c}{a} \iff 1 \times x_2 = \frac{3}{1} = 3$. Ainsi $g(x) = (x-1)(x-3)$.

Ou bien :

On calcule le discriminant de $g(x) = x^2 - 4x + 3$:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$$

Il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

Donc $g(x) = (x-1)(x-3)$.

Comme le coefficient directeur du trinôme est $a = 1 > 0$, $g(x)$ est du signe de $(x-1)(x-3)$: positif à l'extérieur des racines, négatif entre les racines.

RÉPONSE

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Question 2.a — Vérification de $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on calcule $\dfrac{g(x)}{x}$:

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{4x}{x} + \frac{3}{x} = x - 4 + \frac{3}{x}$$

RÉPONSE

On retrouve bien la définition de f, donc $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Question 2.b — Position de $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses

MÉTHODE

La courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses là où $f(x) > 0$, en dessous là où $f(x) < 0$, et sur l'axe là où $f(x) = 0$.
Or $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, donc le signe de f est celui du quotient de $g(x)$ par x.

On dresse le tableau de signes de $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$. On réutilise le tableau de g obtenu en question 1 et on ajoute le signe de x :

RÉPONSE

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x		$-$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

- Sur $]-\infty\,;\,0[$, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de l'axe des abscisses.
- Sur $]0\,;\,1[$, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
- Sur $]1\,;\,3[$, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de l'axe des abscisses.
- Sur $]3\,;\,+\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.
- En $x = 1$ et $x = 3$: $f(1) = 0$ et $f(3) = 0$, donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en ces deux points.

Question 2.c — Démonstration de $f'(x) = \dfrac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x^2}$

On dérive $f(x) = \frac{g(x)}{x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(2x-4) \times x - 1 \times (x^2 - 4x + 3)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 4x - x^2 + 4x - 3}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2}$$

On reconnaît une identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a = x$ et $b = \sqrt{3}$:

$$x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

RÉPONSE

On obtient bien :

$$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{x^2}$$

Question 2.d — Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^*$

Signe de $f'(x)$: Le dénominateur $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = x^2 - 3$. D'après la règle des signes d'un polynôme du second degré de coefficient dominant $a = 1$, $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ est positif à l'extérieur de ses racines (évidentes) $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$. :

RÉPONSE

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$-2\sqrt{3}-4$	↘	‖	↘	$2\sqrt{3}-4$	↗	

f admet un maximum local en $x = -\sqrt{3}$ valant $f(-\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} - 4$,
et un minimum local en $x = \sqrt{3}$ valant $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 4$.

Question 2.e — Équations des tangentes en $x = 1$, $x = \sqrt{3}$ et $x = 3$

RAPPEL DE COURS

L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)\,(x-a) + f(a)$$

Tangente en $x = 1$:

$$f(1) = 1 - 4 + \frac{3}{1} = 0 \qquad f'(1) = 1 - \frac{3}{1^2} = -2$$

TANGENTE EN $x = 1$

$y = -2(x-1) + 0$, soit $\boxed{y = -2x + 2}$.

Tangente en $x = \sqrt{3}$:
Le tableau de variations montre que $f'(\sqrt{3}) = 0$ (extremum). On a $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 4$ (donné).

TANGENTE EN $x = \sqrt{3}$

$y = 0 \times (x - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 4)$, soit $\boxed{y = 2\sqrt{3} - 4}$ (tangente horizontale).

Tangente en $x = 3$:

$$f(3) = 3 - 4 + \frac{3}{3} = 0 \qquad f'(3) = 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

TANGENTE EN $x = 3$

$y = \frac{2}{3}(x-3) + 0$, soit $\boxed{y = \frac{2}{3}x - 2}$.

Question 3.a — Calcul de $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(6)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 4 + \frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 4 + 6 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$f(6) = 6 - 4 + \frac{3}{6} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

RÉPONSE

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$ et $f(6) = \dfrac{5}{2}$.

Les deux points $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ et $\left(6\,;\,\dfrac{5}{2}\right)$ sont sur $\mathcal{C}$.

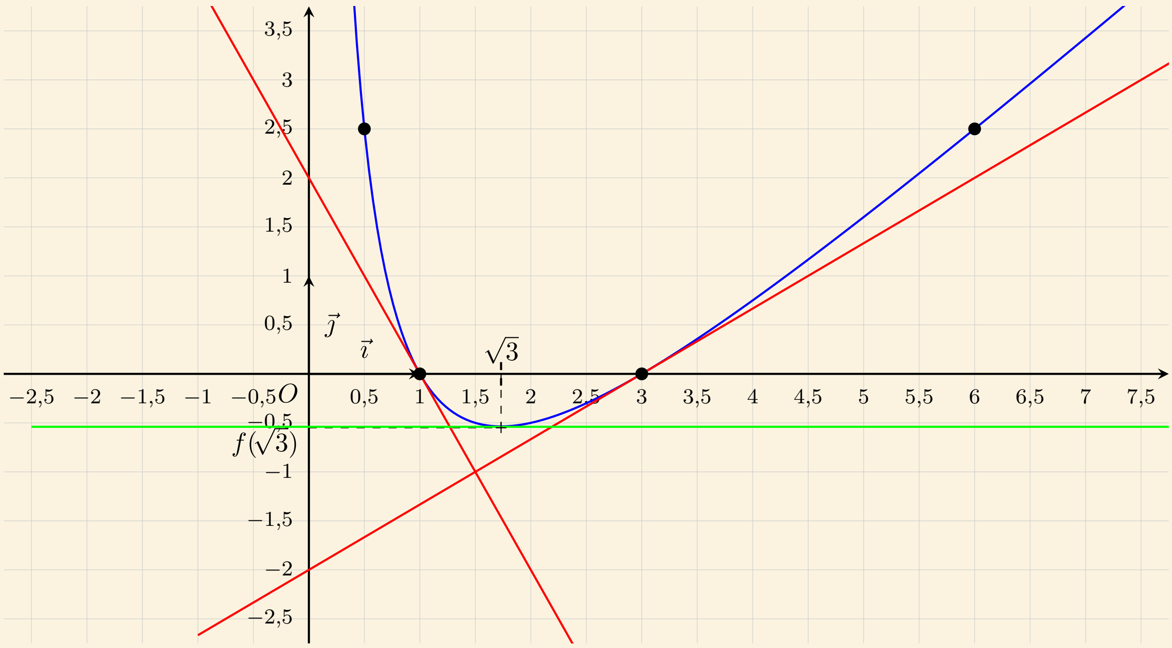
Question 3.b — Allure de la courbe $\mathcal{C}$ sur $]0\,;\,6]$

On dispose de tous les éléments nécessaires au tracé :

RÉPONSE

Éléments à faire figurer :

- Point $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$: point de départ de la courbe à gauche.
- Sur $]0\,;\,1[$: $f(x) > 0$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses.
- En $x = 1$: $f(1) = 0$, la courbe coupe l'axe des abscisses, tangente de pente -2.
- Sur $]1\,;\,3[$: $f(x) < 0$, la courbe est en dessous de l'axe des abscisses.
- En $x = \sqrt{3} \approx 1{,}73$: minimum local, $f(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 4 \approx -0{,}54$, tangente horizontale.
- En $x = 3$: $f(3) = 0$, la courbe recoupe l'axe des abscisses, tangente de pente $\frac{2}{3}$.
- Sur $]3\,;\,6]$: $f(x) > 0$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, croissante.
- Point $\left(6\,;\,\frac{5}{2}\right)$: point d'arrivée à droite.



Deuxième Partie — Exercice 2

(13 pts)

Partie 1 — Production hebdomadaire

Question 1.a — Calcul de u_2 et u_3

Clara produit 5 pièces de plus chaque semaine. On a $u_1 = 10$, donc :

$$u_2 = u_1 + 5 = 10 + 5 = 15 \qquad u_3 = u_2 + 5 = 15 + 5 = 20$$

RÉPONSE

$u_2 = 15$ pièces et $u_3 = 20$ pièces.

Question 1.b — Nature de la suite (u_n)

RAPPEL DE COURS

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$ (on ajoute un même nombre à chaque étape).

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours 5, donc :

RÉPONSE

La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $u_1 = 10$.

Question 1.c — Sens de variations

RÉPONSE

Comme la raison $r = 5 > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante. La production hebdomadaire augmente d'une semaine à l'autre.

Question 1.d — Expression de u_n en fonction de n

RAPPEL DE COURS

Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison r :

$$u_n = u_1 + (n - 1) \times r$$

$$u_n = 10 + (n - 1) \times 5 = 10 + 5n - 5$$

RÉPONSE

$$u_n = 5n + 5 \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Question 1.e — Somme S des n premières semaines

RAPPEL DE COURS

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est :

$$S = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$$

(c'est-à-dire n fois la moyenne du premier et du dernier terme).

$$S = n \times \frac{u_1 + u_n}{2} = n \times \frac{10 + (5n+5)}{2} = n \times \frac{5n+15}{2}$$

RÉPONSE

$$S = \frac{n(5n+15)}{2} = \frac{5n(n+3)}{2} \text{ pièces}$$

Partie 2 — Ventes en ligne

Question 2.a — Calcul de v_2 et v_3

Les ventes doublent chaque mois. On a $v_1 = 8$:

$$v_2 = 2 \times v_1 = 2 \times 8 = 16 \qquad v_3 = 2 \times v_2 = 2 \times 16 = 32$$

RÉPONSE

$v_2 = 16$ pièces et $v_3 = 32$ pièces.

Question 2.b — Nature de la suite (v_n)

RAPPEL DE COURS

Une suite (v_n) est géométrique de raison q si, pour tout n, $v_{n+1} = q \times v_n$ (on multiplie par un même nombre à chaque étape).

On multiplie par 2 à chaque étape :

RÉPONSE

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $v_1 = 8$.

Question 2.c — Sens de variations

RÉPONSE

Comme $q = 2 > 1$ et $v_1 = 8 > 0$, tous les termes sont positifs et la suite (v_n) est strictement croissante. Les ventes augmentent d'un mois à l'autre.

Question 2.d — Expression de v_n en fonction de n

RAPPEL DE COURS

Pour une suite géométrique de premier terme v_1 et de raison q :

$$v_n = v_1 \times q^{n-1}$$

$$v_n = 8 \times 2^{n-1} = 2^3 \times 2^{n-1}$$

RÉPONSE

$$v_n = 2^{n+2} \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

Question 2.e — Somme T des n premiers mois

RAPPEL DE COURS

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme v_1 et de raison $q \neq 1$ est :

$$T = v_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$T = 8 \times \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 8(2^n - 1) = 8 \times 2^n - 8 = 2^3 \times 2^n - 8$$

RÉPONSE

$$T = 2^{n+3} - 8 \text{ pièces}$$

Partie 3 — Économies

Question 3.a — Calcul de w_1

On applique la relation de récurrence $w_{n+1} = 1{,}5\,w_n + 200$ avec $n = 0$:

$$w_1 = 1{,}5 \times w_0 + 200 = 1{,}5 \times 500 + 200 = 750 + 200$$

RÉPONSE

$w_1 = 950$ €.

Question 3.b — (t_n) est une suite géométrique de raison 1,5

On pose $t_n = w_n + 400$. On calcule t_{n+1} en utilisant la relation de récurrence :

$$t_{n+1} = w_{n+1} + 400 = (1{,}5\,w_n + 200) + 400 = 1{,}5\,w_n + 600$$

On factorise par 1,5 :

$$t_{n+1} = 1{,}5\,(w_n + 400) = 1{,}5\,t_n$$

RÉPONSE

On a $t_{n+1} = 1{,}5 \times t_n$, donc (t_n) est bien une suite géométrique de raison 1,5. Son premier terme est :

$$t_0 = w_0 + 400 = 500 + 400 = 900$$

Question 3.c — Expression de t_n en fonction de n

(t_n) est géométrique de raison $q = 1{,}5$ et de premier terme $t_0 = 900$:

RÉPONSE

$$t_n = 900 \times 1{,}5^n = 900 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Question 3.d — Expression de w_n en fonction de n

Puisque $t_n = w_n + 400$, on en déduit $w_n = t_n - 400$:

RÉPONSE

$$w_n = 900 \times 1{,}5^n - 400 \text{ €}$$

L'épargne de Clara au bout de n mois est de $900 \times 1{,}5^n - 400$ euros.