

## ÉPREUVE ANTICIPÉE DE MATHÉMATIQUES – SPÉCIALITÉ – PREMIÈRE

Corrigé · 2 heures · Calculatrice non autorisée

## Première partie : Automatismes – QCM

(6 pts)

Aucune justification n'est demandée. Une seule réponse correcte par question.

Question 1. L'inverse du triple de 4 est :

Le triple de 4 vaut  $3 \times 4 = 12$ . Son inverse est donc  $\frac{1}{12}$ .

RÉPONSE

a.  $\frac{1}{12}$ Question 2. Soit  $x = 2$  et  $y = 5$ . La valeur de  $2x - 3y$  est :

$$2x - 3y = 2 \times 2 - 3 \times 5 = 4 - 15 = -11.$$

RÉPONSE

a.  $-11$ 

Question 3. Probabilité de piocher une boule rouge (5 rouges, 15 noires) :

Le sac contient  $5 + 15 = 20$  boules. La probabilité est  $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ .

RÉPONSE

c.  $\frac{1}{4}$ Question 4. Coefficient directeur de la droite passant par  $(0; 2)$  et  $(4; 10)$  :

$$m = \frac{10 - 2}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2.$$

RÉPONSE

c. 2

Question 5. Solutions de  $(x - 3)(x + 2) = 0$  :

$$(x - 3)(x + 2) = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -2.$$

RÉPONSE

c.  $-2$  et  $3$ Question 6. On considère  $A = \frac{10^3}{10^7}$  :

$$A = 10^{3-7} = 10^{-4}.$$

## RÉPONSE

c.  $A = 10^{-4}$

Question 7. Combien font 0,15 km en mètres ?

$$0,15 \text{ km} = 0,15 \times 1000 = 150 \text{ m.}$$

## RÉPONSE

b. 150 m

Question 8. Quel nombre est plus grand que  $\frac{6}{8}$  ?

On a  $\frac{6}{8} = 0,75$ . On compare :

- $6,8 \times 10^{-1} = 0,68 < 0,75$
- $86\% = 0,86 > 0,75$  ✓
- $\frac{599}{800} = 0,74875 < 0,75$
- $\left(\frac{6}{8}\right)^2 = 0,5625 < 0,75$

## RÉPONSE

b. 86 %

Question 9. L'équation  $x + \frac{2}{3} = \frac{30}{9}$  a pour solution :

$$x = \frac{30}{9} - \frac{2}{3} = \frac{30}{9} - \frac{6}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}.$$

## RÉPONSE

c.  $\frac{8}{3}$

Question 10. 210 millions de passagers en 2019, baisse de 57 % en deux ans :

Une baisse de 57 % revient à multiplier par  $1 - 0,57 = 0,43$  :

$$210 \times 0,43 = 90,3 \text{ millions.}$$

## RÉPONSE

d. 90,3 millions de passagers en 2021

Question 11. Image de 1 par  $f$  d'après le graphique :

La courbe représente  $f(x) = 0,25x^3 + 0,5x^2 - 1,25x - 0,5$ . Pour  $x = 1$  :

$$f(1) = 0,25 + 0,5 - 1,25 - 0,5 = -1.$$

## RÉPONSE

c.  $f(1) = -1$

Question 12. Antécédents de 1 par  $f$  d'après le même graphique :

On vérifie algébriquement les trois points où la droite  $y = 1$  coupe la courbe :

$$f(-3) = -6,75 + 4,5 + 3,75 - 0,5 = 1, \quad f(-1) = -0,25 + 0,5 + 1,25 - 0,5 = 1, \quad f(2) = 2 + 2 - 2,5 - 0,5 = 1.$$

**RÉPONSE**

c.  $-1$ ,  $2$  et  $-3$

## Deuxième partie – Spécialité mathématiques

(14 pts)

## Exercice 1 — Raja et le marathon

(6 pts)

## RAPPEL DE COURS

Une suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  si  $u_{n+1} = q \cdot u_n$  pour tout  $n$ . Son terme général est  $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ .

1. Calculer  $d_2$ .

Augmenter de 5 % revient à multiplier par 1,05 :

$$d_2 = d_1 \times 1,05 = 20 \times 1,05 = 21 \text{ km}.$$

Vérification :  $d_3 = 21 \times 1,05 = 22,05 \text{ km}$ . ✓2.  $(d_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ?

## MÉTHODE

On vérifie la constance de la différence (suite arithmétique) ou du rapport (suite géométrique).

- $d_2 - d_1 = 1$  et  $d_3 - d_2 = 1,05$  : les différences ne sont pas constantes  $\Rightarrow$  pas arithmétique.
- $\frac{d_2}{d_1} = \frac{21}{20} = 1,05$  et  $\frac{d_3}{d_2} = \frac{22,05}{21} = 1,05$  : le rapport est constant, la suite semble géométrique.

## RÉPONSE

 $(d_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 1,05$  et de premier terme  $d_1 = 20$ .3. Exprimer  $d_{n+1}$  en fonction de  $d_n$ .

## RÉPONSE

Pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :  $d_{n+1} = 1,05 \times d_n$ .4. Justifier que  $d_n = 20 \times 1,05^{n-1}$  pour tout  $n > 1$ .

## MÉTHODE

La forme explicite d'une suite géométrique est donnée par  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d_n = d_1 \times q^{n-1}$ .

D'après les questions précédentes, on a :

## RÉPONSE

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, d_n = 20 \times 1,05^{n-1}.$$

5. Distance lors du 10<sup>e</sup> entraînement, arrondie au mètre.. Pour  $n = 10$  :

$$d_{10} = 20 \times 1,05^9.$$

D'après le tableau :  $1,05^9 = 1,55132822$ , donc

$$d_{10} = 20 \times 1,55132822 = 31,0265 \dots \text{ km} = 31 \text{ km } 026,5 \dots \text{ m}.$$

## RÉPONSE

$d_{10} \approx \mathbf{31\,027}$  m (arrondi au mètre près).

La distance parcourue lors du 10e entraînement est de 31 km environ.

6. Compléter le script Python – nombre minimal d’entraînements.

## ANALYSE DU SCRIPT

La boucle while incrémente  $n$  et multiplie  $d$  par 1,05 tant que  $d < 43$ . À la sortie,  $n$  est le premier rang pour lequel  $d \geq 43$ .

On cherche  $n$  tel que  $d_n \geq 43$ , c’est-à-dire  $1,05^{n-1} \geq 2,15$ . En prolongeant le tableau au-delà de  $n = 14$  :

$$1,05^{15} \approx 2,0789 \Rightarrow d_{16} \approx 41,58 \text{ km} < 43, \quad 1,05^{16} \approx 2,1829 \Rightarrow d_{17} \approx 43,66 \text{ km} \geq 43.$$

## RÉPONSE

```
n = 1
d = 20
while d < 43:
    n = n + 1
    d = 1.05*d
```

Après exécution du script,  $n = \mathbf{17}$  : Raja doit effectuer au moins 17 entraînements pour être prête.

## Exercice 2 — Produit scalaire et hauteur

(8 pts)

Points :  $A(-1; 1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(0; 7)$ .  $B'$  est le pied de la hauteur issue de  $B$ .

On calcule les vecteurs nécessaires :

$$\vec{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$  en fonction de  $CB'$ .On conjecture graphiquement que  $B'$  appartient au segment  $[CA]$ .Donc  $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \vec{CA} \cdot \vec{CB}' = CA \times CB'$  avec  $B'$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(CA)$  et les vecteurs  $\vec{CA}$  et  $\vec{CB}'$  sont colinéaires de même sens.

On calcule :

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-1)(2) + (-6)(-5) = -2 + 30 = 28.$$

## RÉPONSE

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \times CB' = 28.$$

2. En déduire  $CB'$  puis  $BB'$ . $CA = \|\vec{CA}\| = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$ , donc :

$$CB' = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{CA} = \frac{28}{\sqrt{37}} = \frac{28\sqrt{37}}{37}.$$

 $CB = \|\vec{CB}\| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$ . Le triangle  $CB'B$  est rectangle en  $B'$ , d'où par Pythagore :

$$BB'^2 = CB^2 - CB'^2 = 29 - \frac{784}{37} = \frac{1073 - 784}{37} = \frac{289}{37}.$$

## RÉPONSE

$$CB' = \frac{28\sqrt{37}}{37} \quad \text{et} \quad BB' = \frac{17}{\sqrt{37}} = \frac{17\sqrt{37}}{37}.$$

3. Calculer l'aire de  $ABC$ . $BB'$  est la hauteur relative au côté  $[AC]$  de longueur  $CA = \sqrt{37}$  :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \times CA \times BB' = \frac{1}{2} \times \sqrt{37} \times \frac{17}{\sqrt{37}} = \frac{17}{2}.$$

## RÉPONSE

L'aire du triangle  $ABC$  est  $\frac{17}{2} = 8,5$  unités d'aire.

Exercice 3 — Étude d'une fonction exponentielle

(5 pts)

On pose  $f(x) = e^{2x} + 6e^x - 8x - 4$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}_f$  sa courbe,  $\mathcal{D} : y = -8x - 4$ .

1. Montrer que  $f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 4)$ .

En dérivant terme à terme :  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x} + 6e^x - 8$ .

Vérification par développement :

$$\begin{aligned} 2(e^x - 1)(e^x + 4) &= 2(e^{2x} + 4e^x - e^x - 4) \\ &= 2(e^{2x} + 3e^x - 4) \\ &= 2e^{2x} + 6e^x - 8. \quad \checkmark \end{aligned}$$

On retrouve bien  $f'(x)$ , la factorisation est donc établie.

RÉPONSE

$$f'(x) = 2(e^x - 1)(e^x + 4).$$

2. Signe de  $f'(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  donc  $e^x + 4 > 0$  (toujours positif).

Le signe de  $f'(x)$  est donc celui de  $(e^x - 1)$  :

$$e^x - 1 \begin{cases} < 0 & \text{si } x < 0, \\ = 0 & \text{si } x = 0, \\ > 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

RÉPONSE

$$f'(x) < 0 \text{ pour } x < 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(x) > 0 \text{ pour } x > 0.$$

3. Tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$f(0) = 1 + 6 - 0 - 4 = 3.$$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f$			

4. Signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

D'après le tableau,  $f$  admet un minimum global en  $x = 0$  valant  $f(0) = 3$ .

RÉPONSE

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 3 > 0, \text{ donc } f(x) > 0.$$

5.  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$  ont-elles un point commun ?

Un point commun satisfait  $f(x) = -8x - 4$  :

$$\begin{aligned} e^{2x} + 6e^x - 8x - 4 = -8x - 4 &\iff e^{2x} + 6e^x = 0 \\ &\iff e^x \underbrace{(e^x + 6)}_{>0} = 0. \end{aligned}$$

Or  $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  : l'équation est impossible.

**RÉPONSE**

$\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{D}$  n'ont aucun point commun.