

## CORRECTION — EAM Sujet N°4

Mathématiques — Classe de Première

## PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES — QCM (5 pts)

Tableau des réponses :

Question	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Réponse	A	B	C	C	A	A	A	A	B	A

## Question n°1 — Réponse A

On cherche  $a$  à partir de  $m = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ .

Pour isoler  $a$ , on isole d'abord  $\frac{1}{a}$ , puis on prend l'inverse.

On soustrait  $\frac{1}{b}$  des deux membres :

$$\frac{1}{a} = m - \frac{1}{b} = \frac{mb}{b} - \frac{1}{b} = \frac{mb - 1}{b}$$

En prenant l'inverse des deux membres (valable car  $a \neq 0$ ) :

$$a = \frac{b}{bm - 1}$$

## Question n°2 — Réponse B

On lit les effectifs dans le tableau pour en déduire les probabilités (sur un total de 100) :

	A	$\bar{A}$	Total
B	30	45	75
$\bar{B}$	10	15	25
Total	40	60	100

On calcule chaque proposition :

A.  $P(A \cap \bar{B}) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \neq \frac{9}{20}$

B.  $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{30}{100} + \frac{15}{100} = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} \quad \checkmark$

C.  $P_A(\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{10/100}{40/100} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \neq \frac{9}{20}$

D.  $P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{10/100}{25/100} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5} \neq \frac{9}{20}$

**Réponse :**  $\frac{9}{20} = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$ , la réponse est **B**.

**Question n°3 — Réponse C**

Prix initial : 50 €.

Une augmentation de  $t\%$  correspond à multiplier par  $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$  ; une baisse de  $t\%$  à multiplier par  $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$ .

- Augmentation de 50 % :  $\times 1,5$
- Baisse de 80 % :  $\times 0,2$
- Évolution globale :  $50 \times 1,5 \times 0,2 = 50 \times 0,3 = 15$

**Réponse :** Le prix final est 15 €  $\Rightarrow$  réponse **C**.

**Question n°4 — Réponse C**

On observe la parabole  $\mathcal{P}$  :

- Elle est **tournée vers le haut** (minimum)  $\Rightarrow$  le coefficient de  $x^2$  est **positif**, ce qui élimine B et D.
- Son **minimum** est en dessous de l'axe des abscisses (valeur négative)  $\Rightarrow$  la constante est **négative**, ce qui élimine A (+3).

**Réponse :** La seule fonction cohérente est  $x \mapsto 1,4x^2 - 3 \Rightarrow$  réponse **C**.

**Question n°5 — Réponse A**

On a  $\frac{1}{U} = 2 + \frac{3}{8}$ . On calcule le membre de droite en réduisant au même dénominateur :

$$2 + \frac{3}{8} = \frac{16}{8} + \frac{3}{8} = \frac{19}{8}$$

Donc  $\frac{1}{U} = \frac{19}{8}$ , d'où en prenant l'inverse :

$$U = \frac{8}{19}$$

**Réponse :** Réponse **A**.

**Question n°6 — Réponse A**

On développe  $(2x - 5)(x^2 - 3x + 2)$  en distribuant chaque terme de  $(2x - 5)$  :

$$\begin{aligned} (2x - 5)(x^2 - 3x + 2) &= 2x \cdot x^2 + 2x \cdot (-3x) + 2x \cdot 2 + (-5) \cdot x^2 + (-5)(-3x) + (-5)(2) \\ &= 2x^3 - 6x^2 + 4x - 5x^2 + 15x - 10 \\ &= 2x^3 + (-6 - 5)x^2 + (4 + 15)x - 10 \\ &= \boxed{2x^3 - 11x^2 + 19x - 10} \end{aligned}$$

**Réponse :** Réponse **A**.

**Question n°7 — Réponse A**

On résout  $2x + 8 > 4x - 6$  :

$$2x + 8 > 4x - 6$$

$$8 + 6 > 4x - 2x \quad (\text{on regroupe les } x \text{ à droite et les constantes à gauche})$$

$$14 > 2x$$

$$x < 7$$

**Réponse :** L'ensemble solution est  $] -\infty ; 7[$  soit  $x < 7 \Rightarrow$  réponse **A**.

**Question n°8 — Réponse A**

On simplifie  $\frac{(a^4)^{-2} \times a^2}{a^{-3}}$  en utilisant les règles sur les puissances.

**Étape 1 :**  $(a^4)^{-2} = a^{4 \times (-2)} = a^{-8}$

**Étape 2 :** Numérateur :  $a^{-8} \times a^2 = a^{-8+2} = a^{-6}$

**Étape 3 :**  $\frac{a^{-6}}{a^{-3}} = a^{-6-(-3)} = a^{-6+3} = \boxed{a^{-3}}$

**Réponse :** Réponse **A**.

**Question n°9 — Réponse B**

La courbe représente  $f'$ . On cherche l'affirmation **fausse** :  $f$  est croissante là où  $f' > 0$ , et décroissante là où  $f' < 0$ .

D'après la courbe de  $f'$ , on lit les zéros de  $f'$  :  $x = -4$ ,  $x = 1$  et  $x = 3$ .

$x$	-5	-4	1	3				
Signe de $f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	
Variations de $f$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

On vérifie chaque affirmation :

**A.**  $f$  croissante sur  $[-4; -2]$  : l'intervalle  $[-4; -2] \subset [-4; 1]$  où  $f' \geq 0$  **VRAIE**

**B.**  $f$  décroissante sur  $[0; 2]$  : sur  $[0; 1[$ ,  $f' > 0$  donc  $f$  est *croissante* ! **FAUSSE**

**C.**  $f$  croissante sur  $[-2; 0]$  :  $[-2; 0] \subset [-4; 1]$  où  $f' > 0$  **VRAIE**

**D.**  $f$  décroissante sur  $[1; 3]$  : sur  $[1; 3]$ ,  $f' \leq 0$  **VRAIE**

**Réponse :** L'affirmation fautive est **B** :  $f$  n'est pas décroissante sur  $[0; 2]$  car elle est d'abord croissante sur  $[0; 1]$ .

**Question n°10 — Réponse A**

On convertit 1 000 m/s en km/h.

$$1\,000 \text{ m/s} = 1\,000 \times 3\,600 \text{ m/h} = 3\,600\,000 \text{ m/h} = 3\,600 \text{ km/h}$$

**Réponse :**  $1\,000 \text{ m/s} = 3\,600 \text{ km/h} \Rightarrow$  réponse **A**.

## DEUXIÈME PARTIE : EXERCICES (15 pts)

### Exercice 1 :

#### Partie A — Lecture graphique

La fonction  $f$  est définie par  $f(x) = \frac{150(x-1)}{x^2-6x+14} + 25$ . Sa courbe  $\mathcal{C}_f$  et la tangente  $\mathcal{T}$  au point  $A$  d'abscisse 3 sont représentées graphiquement.

#### Rappels de cours :

- $f$  est **croissante** sur un intervalle où  $f' > 0$  et **décroissante** où  $f' < 0$ .
- $f'(a) = 0$  correspond à un **extremum** de  $f$  (minimum ou maximum local).
- $f'(a)$  est la **pen**te (coefficient directeur) de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$ .
- Équation de la tangente en  $x = a$  :  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

#### 1. Solution de $f'(x) = 0$ sur $[0; 20]$ :

$f'(x) = 0$  signifie que la tangente à  $\mathcal{C}_f$  est horizontale (pente nulle). Graphiquement, cela correspond au **point le plus haut** (maximum) de la courbe sur  $[0; 20]$ .

On lit sur le graphique que ce maximum est atteint en :

$$f'(x) = 0 \iff x = 4$$

#### 2. Solutions de $f'(x) > 0$ sur $[0; 20]$ :

$f'(x) > 0$  signifie que la courbe est **croissante**. D'après le graphique,  $f$  est croissante avant le maximum (atteint en  $x = 4$ ) et décroissante ensuite.

$$f'(x) > 0 \text{ pour } x \in ]0; 4[$$

#### 3. Valeur de $f(3)$ :

Le point  $A$  est sur la courbe  $\mathcal{C}_f$  et a pour abscisse 3. On lit son ordonnée graphiquement :

$$f(3) = 85$$

#### 4. Valeur de $f'(3)$ :

$f'(3)$  est la **pen**te de la droite  $\mathcal{T}$  (tangente en  $A$ ). Pour la lire graphiquement, on cherche deux points bien lisibles sur  $\mathcal{T}$ .

D'après le graphique, la tangente  $\mathcal{T}$  passe par le point  $B(1; 25)$  et par  $A(3; 85)$ .

La pente vaut :

$$f'(3) = \frac{85 - 25}{3 - 1} = \frac{60}{2} = 30$$

$$f'(3) = 30$$

#### 5. Équation réduite de la droite $\mathcal{T}$ :

On utilise la formule de la tangente en  $x = 3$  :

$$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3) = 30(x - 3) + 85 = 30x - 90 + 85$$

L'équation réduite de  $\mathcal{F}$  est :  $y = 30x - 5$

### Partie B — Étude de la fonction $f$

On rappelle que  $f(x) = \frac{150(x-1)}{x^2-6x+14} + 25$  sur  $[0; 20]$ .

#### 1. Calcul de $f'(x)$ :

$f$  est de la forme  $u/v + \text{constante}$ . On utilise la formule :  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$   
 Ici, on dérive  $g(x) = \frac{x-1}{x^2-6x+14}$ , puis on multiplie par 150.

Posons  $u(x) = x - 1$  et  $v(x) = x^2 - 6x + 14$ . Alors :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x - 6$$

On calcule le numérateur de  $g'(x)$  :

$$\begin{aligned} u'(x)v(x) - u(x)v'(x) &= 1 \cdot (x^2 - 6x + 14) - (x - 1)(2x - 6) \\ &= x^2 - 6x + 14 - (2x^2 - 6x - 2x + 6) \\ &= x^2 - 6x + 14 - (2x^2 - 8x + 6) \\ &= x^2 - 6x + 14 - 2x^2 + 8x - 6 \\ &= -x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

La constante 25 a une dérivée nulle, donc :

$$f'(x) = \frac{150(-x^2 + 2x + 8)}{(x^2 - 6x + 14)^2}$$

ce qui est bien ce qu'il fallait montrer.

#### 2. a. Signe de $f'(x)$ sur $[0; 20]$ :

**Dénominateur :**  $(x^2 - 6x + 14)^2$  est un carré, donc il est **toujours positif ou nul**. Son discriminant est  $\Delta = 36 - 56 = -20 < 0$ , ce qui garantit que  $x^2 - 6x + 14 > 0$  pour tout réel  $x$ . Le dénominateur est donc **strictement positif**.

**Numérateur :**  $-x^2 + 2x + 8$ . On résout  $-x^2 + 2x + 8 = 0$ , soit  $x^2 - 2x - 8 = 0$ .

Discriminant :  $\Delta = 4 + 32 = 36$ . Racines :

$$x_1 = \frac{2-6}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$$

Donc  $-x^2 + 2x + 8 = -(x+2)(x-4)$ .

Comme le coefficient de  $x^2$  est  $-1 < 0$ , la parabole est tournée vers le bas : le trinôme est positif *entre* les racines.

Sur  $[0; 20]$ , la racine  $x = -2$  est hors de l'intervalle. On établit le tableau de signes :

$x$	0		4		20
$-x^2 + 2x + 8$	+	+	0	-	-
$(x^2 - 6x + 14)^2$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	-

$f'(x) > 0$  sur  $]0; 4[$ ,  $f'(4) = 0$  et  $f'(x) < 0$  sur  $]4; 20]$ .

b. **Tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 20]$  :**

On calcule  $f(4)$  :

$$f(4) = \frac{150(4-1)}{16-24+14} + 25 = \frac{150 \times 3}{6} + 25 = 75 + 25 = 100$$

On admet  $f(0) = \frac{100}{7} \approx 14,3$  et  $f(20) = \frac{1700}{49} \approx 34,7$ .

$x$	0	4	20		
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$\frac{100}{7}$	$\nearrow$	100	$\searrow$	$\frac{1700}{49}$

$f$  est **croissante** sur  $[0; 4]$  et **décroissante** sur  $[4; 20]$ .  
Le maximum de  $f$  sur  $[0; 20]$  est  $f(4) = 100$ .

c. **Nombre de jours pour le score maximal :**

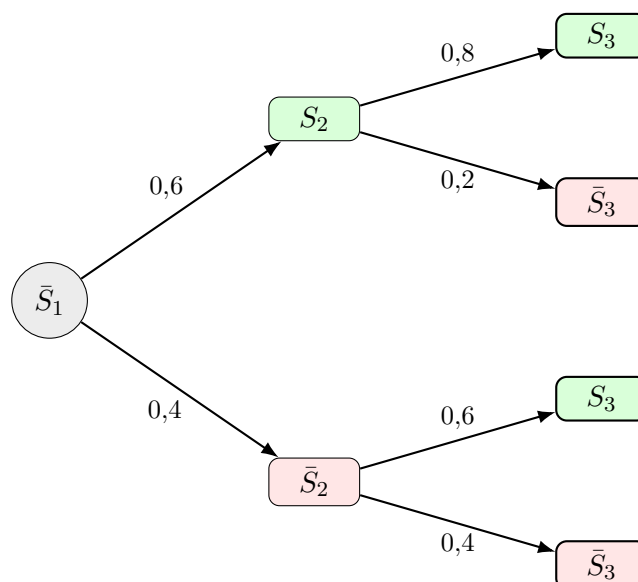
Le score maximal de 100 est atteint lorsque  $x = 4$ .

Le score d'intérêt atteint son maximum **4 jours** après la publication de la vidéo.

**Exercice 2 :****Partie A — Probabilités sur 3 semaines**

Jules n'a pas fait de sport la semaine 1. Les probabilités de transition sont :

- Si Jules n'est **pas** allé au sport : il y va la semaine suivante avec probabilité 0,6.
- Si Jules est **allé** au sport : il y retourne avec probabilité 0,8.

**1. Arbre pondéré pour les semaines 2 et 3 :****2. Calcul de  $P(S_2 \cap S_3)$  :**

Sur l'arbre, on lit la branche  $S_2$  puis  $S_3$  et on **multiplie** les probabilités.

$$P(S_2 \cap S_3) = P(S_2) \times P(S_3 | S_2) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

$$P(S_2 \cap S_3) = 0,48.$$

**Interprétation :** La probabilité que Jules soit allé au sport à la fois la 2<sup>e</sup> et la 3<sup>e</sup> semaine est 0,48 (soit 48 %).

**3. Montrons que  $P(S_3) = 0,72$  :**

Par la **formule des probabilités totales**, en distinguant selon si Jules est allé ou non au sport la semaine 2 :

$$P(S_3) = P(S_2 \cap S_3) + P(\bar{S}_2 \cap S_3)$$

On calcule  $P(\bar{S}_2 \cap S_3)$  sur la branche  $\bar{S}_2$  puis  $S_3$  :

$$P(\bar{S}_2 \cap S_3) = P(\bar{S}_2) \times P_{\bar{S}_2}(S_3) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$$

Donc :

$$P(S_3) = 0,48 + 0,24 = \boxed{0,72}$$

4. Probabilité conditionnelle  $P_{S_3}(S_2)$  :

La probabilité conditionnelle de  $S_2$  sachant  $S_3$  est :  $P_{S_3}(S_2) = \frac{P(S_2 \cap S_3)}{P(S_3)}$

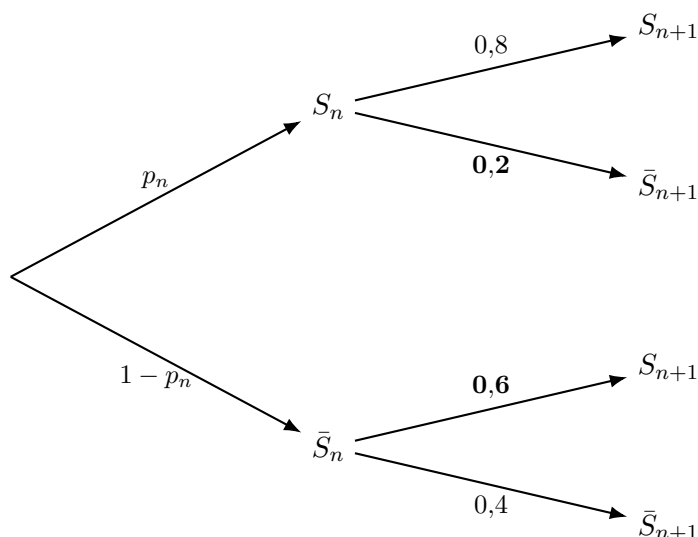
$$P_{S_3}(S_2) = \frac{P(S_2 \cap S_3)}{P(S_3)} = \frac{0,48}{0,72} = \frac{48}{72} = \frac{2}{3}$$

Sachant que Jules est allé au sport la 3<sup>e</sup> semaine, la probabilité qu'il soit aussi allé la 2<sup>e</sup> semaine est  $\frac{2}{3} \approx 0,667$ .

Partie B — Suite ( $p_n$ )

On note  $p_n = P(S_n)$  avec  $p_1 = 0$ .

## 1. Arbre complété :



Les valeurs à compléter (en **gras**) sont : **0,2** (probabilité de  $\bar{S}_{n+1}$  sachant  $S_n$ ) et **0,6** (probabilité de  $S_{n+1}$  sachant  $\bar{S}_n$ ).

2. Justification de  $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6$  :

Par la formule des probabilités totales (en conditionnant par  $S_n$  ou  $\bar{S}_n$ ) :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(S_{n+1}) = P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(\bar{S}_n) \times P_{\bar{S}_n}(S_{n+1}) \\ &= p_n \times 0,8 + (1 - p_n) \times 0,6 \\ &= 0,8p_n + 0,6 - 0,6p_n \\ &= \boxed{0,2p_n + 0,6} \end{aligned}$$

3. Calcul de  $p_4$  :

On a montré en Partie A que  $p_3 = 0,72$  (question 3 de la Partie A). On applique la relation de récurrence :

$$p_4 = 0,2 \times p_3 + 0,6 = 0,2 \times 0,72 + 0,6 = 0,144 + 0,6 = \boxed{0,744}$$

4. **Signe de  $x \mapsto 0,6 - 0,8x$  sur  $[0; 0,75]$  :**

On résout  $0,6 - 0,8x = 0$  :

$$0,8x = 0,6 \implies x = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

Comme le coefficient de  $x$  est  $-0,8 < 0$ , la fonction est **décroissante**.

$x$	0	0,75
$0,6 - 0,8x$	+	0

Sur  $[0; 0,75[$ ,  $0,6 - 0,8x > 0$ , et en  $x = 0,75$ ,  $0,6 - 0,8 \times 0,75 = 0$ .  
Donc  $0,6 - 0,8x \geq 0$  pour tout  $x \in [0; 0,75]$ .

5. **Sens de variation de la suite  $(p_n)$  :**

On étudie le signe de  $p_{n+1} - p_n$  :

$$p_{n+1} - p_n = (0,2p_n + 0,6) - p_n = 0,6 - 0,8p_n$$

Or, d'après l'énoncé,  $p_n \in [0; 0,75]$  pour tout  $n \geq 1$ . D'après la question précédente, on a  $0,6 - 0,8p_n \geq 0$ .

Donc  $p_{n+1} - p_n \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

La suite  $(p_n)$  est **croissante** : chaque semaine, la probabilité que Jules aille au sport augmente (ou reste stable).

6. **Programme Python complété :**

On veut trouver le premier rang  $n$  tel que  $p_n > 0,745$ .

La boucle `while` tourne *tant que* la condition est vérifiée. Elle s'arrête dès que  $p > 0,745$ . À ce moment, `n` contient le numéro de la semaine correspondante.

```

1 n = 1
2 p = 0
3 while p <= 0.745:
4     p = 0.2 * p + 0.6
5     n = n + 1
6 print(n)

```

**Vérification manuelle du déroulement :**

Rang $n$	$p_n$	$p_n > 0,745$ ?
1	0	Non
2	0,6	Non
3	0,72	Non
4	0,744	Non
5	$0,2 \times 0,744 + 0,6 = 0,7488$	<b>Oui !</b>

Le programme affiche donc 5.

À partir de la **semaine 5**, la probabilité que Jules aille au sport dépasse 0,745 pour la première fois ( $p_5 \approx 0,749$ ).